Math. P.
742
a

8 –

Math. P. 742°

A

Bleek 1857.

<36602730910012

<36602730910012

Bayer. Staatsbibliothek

1. v. Krier

[illegible]

[Pierre Simon]

Des Grafen Laplace

Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeiten.

Nach der dritten Pariser Auflage übersetzt von

Friederich Wilhelm Tönnies.

Als wissenschaftliche Anleitung zur Berichtigung unserer Urtheile in Fällen der Ungewißheit, für Philosophen, Aerzte, Richter, Theologen, Naturforscher und Staatsmänner,

mit erläuternden Anmerkungen

herausgegeben von

Karl Christian Langsdorf.

Heidelberg, 1819.
Neue akademische Buchhandlung von Karl Groos.

Gd/65/2405
Bayerische Staatsbibliothek München

Dem Herrn

Abraham Tönnies

und dessen

verehrungswürdigen Gattin

zu Oehde bey Schwelm

gewidmet

von dem

Herausgeber.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Es war wohl nicht bloßer Zufall, daß gerade mir diese Schrift Ihres theuren Sohnes in die Hände kam. Denn Niemand kann größeren Antheil an Ihrem so großen Verluste nehmen, als ich, da auch mir vor ein paar Jahren mein ältester Sohn durch einen ebenso frühzeitigen Tod entrissen wurde, als Ihnen der Ihrige. Auch mein Sohn hatte sich vorzüglich mit dem Studium der Mathematik beschäftigt, zweimal in der Beantwortung mathematischer Preißaufgaben auf hiesiger Universität den Preiß davon getragen, seine akademische Laufbahn bereits vollendet und schon eine seinen Studien angemessene reichliche Versorgung gefunden. Aber die Vorsehung hatte dasselbe über ihn beschlossen, was auch damals schon über den Ihrigen beschlossen war. In gleicher Blüthe des Alters wurden sie uns entrissen. Möchte Ihre Wunde sich schneller der Heilung nähern, als die meinige.

Indem mir das Glück zu Theil geworden ist, mit dieser Schrift dem Publikum die Erstlinge von den Früchten vorzulegen, die wir von den Anstrengungen Ihres theuren Sohnes ärndten, glaubte ich demselben ein schönes und bleibendes Denkmal seiner Talente und seines Fleißes zu stiften, und Ihren Kummer um etwas zu mildern. Mir wenigstens fließt aus der Erinnerung, einen wohlgearteten und guten Sohn verlohren zu haben, stets Balsam in die noch zu frische Wunde.

Heidelberg im März 1818.

Langsdorf.

Vorrede.

Der Name des unsterblichen Verfassers verbürgt die innere Vollkommenheit des Werks, welches ich hiermit meinen Landsleuten in teutscher Sprache vorlege, nnd dessen Wichtigkeit der Gegenstand ausspricht, der darin behandelt wird.

Die Uebersetzung verdankt man Herrn Friedrich Wilhelm Tönnies, Doktor der Philosophie, einem viel versprechenden jungen Manne, der seinen guten Eltern, dem Vaterlande und der Welt viel zu frühe entrissen wurde. Eine kurze Skizze seiner Lebens- und Bildungsgeschichte gebe ich hier mit den Worten des Herrn Professors Diesterweg in Mannheim, in dessen Hause der Vollendete zwey Jahre verlebte, und der die Güte hatte folgendes mir brieflich mitzutheilen:

„Friedrich Wilhelm Tönnies wurde gebohren zu Oehde, unweit Schwelm in der Grafschaft Mark, den 5ten Nov. 1796. Nachdem er von seinem sechsten Jahre an durch den Schullehrer Vogel den ersten Elementarunterricht in dem Hause seiner Eltern, des Handelsmann Abraham Tönnies und dessen Gattin Sophie geb. Osenberg

von Elberfeld, empfangen hatte, kam er im Frühling 1805 in das Haus des Dokter Wilberg in Elberfeld, und besuchte unter dessen besonderer Aufsicht und Leitung sieben Jahre lang die Lehranstalt, deren Vorsteher Wilberg war. Die regsamste Wißbegierde, der unermüdetste Fleiß, und außerordentliche Gutmüthigkeit zeichneten den Knaben aus, und seine herrlichen Talente wurden durch den vortrefflichen Unterricht der Lehrer an jener Schule — vorzüglich Wilbergs und Seelbachs — auf das schönste entwickelt. Im Sommer 1812 kam er in mein Haus, um sich durch den Besuch des hiesigen Lyceum auf die Akademie vorzubreiten. Den Unterricht in der alten Litteratur ertheilten ihm die Professoren Weikum und Nüßlin, den in der Mathematik erhielt er durch mich. Den reich begabten Jüngling beseelte gleiche Liebe zum Studium der alten Litteratur und der Mathematik. In beyden machte er ausgezeichnete Fortschritte, und er erwarb sich durch seinen ausdaurenden Fleiß, die sorgsamste Aufmerksamkeit auf seine Arbeiten und sein Benehmen die ganze Liebe und Werthschätzung seiner Lehrer, so wie die Achtung und Freundschaft seiner Mitschüler. Nehmen Sie nun dazu, daß er bey einem überaus zarten Gemüthe, die furchtloseste Wahrheitsliebe, und die ungeheucheltеste Bescheidenheit besaß, so finden Sie, daß er ein höchst liebenswürdiger Mensch war. — Mit den ehrenvollsten Zeugnissen versehen verließ er die hiesige Anstalt und mein Haus im Julius 1814 bezog im Herbst desselben Jahres die Universität Berlin, um daselbst sich zu einem Lehrer zu bilden, besonders aber um

sich auf das Studium der Mathematik, und vorzugsweise der Astronomie zu legen. Er blieb daselbst bis zum Frühjahr 1815, in welchem er nach Hause zurückkehrte, um dem Rufe des Vaterlandes folgend, die Waffen zu tragen. Der zart gebaute Jüngling, welcher die Strapazen eines Feldzuges nicht würde haben aushalten können, wurde aber von der vaterländischen Militärbehörde in Dortmund nicht angenommen. Er gieng unmittelbar darauf, zur Fortsetzung seiner Studien, im May 1815 nach Göttingen, verließ aber bald diese Universitätsstadt wieder nach einem Aufenthalt von 2 Monaten, weil er einigen Unannehmlichkeiten mit Studierenden nicht anders ein Ende machen zu können glaubte. Im Herbste kehrte er darum nach Berlin zurück, und studierte von nun an ununterbrochen bis zum Frühjahr 1817 Mathematik unter Fischer, Tralles und Grüson und Astronomie insbesondre unter Bode und Philologie vorzüglich unter Wolf. Astronomie war jedoch seine Lieblingswissenschaft: er genoß den täglichen Umgang von Bode, welcher eine besondere Zuneigung zu ihm faßte. Damals übersetzte er die Germania des Tacitus in das Deutsche, und schrieb in lateinischer Sprache eine Abhandlung über die Aufgabe: quomodo ex observatione occultationis stellae fixae a luna effectae longitudo geographica loci computetur; wofür ihm die philosophische Fakultät in Erlangen die Doktorwürde verlieh. Darauf übersetzte er Laplace's Werk über die Wahrscheinlichkeiten, und arbeitete inzwischen zugleich an einer Uebersetzung der lateinischen

Abhandlungen Pfleiderers über Euklides Elemente, welche aber unvollendet geblieben ist *). Im Januar 1817 wurde er nämlich mit Brustbeschwerden, Husten und Blutauswurf überfallen. Das gieng aber vorüber. Heftiger kehrte das Uebel im May zurück: Fieber gesellte sich dazu. Seine Kräfte nahmen sehr ab, so daß er einen ihm vom Staatsrath Süvern gemachten Antrag einer Stelle, als Astronom und Lehrer der Mathematik am Gymnasium zu Danzig, ablehnen mußte. Am Ende des Julius d. J. trat er seine Rückreise von Berlin über Frankfurt nach Hause an, begleitet von seinem treuen Lehrer Dr. Wilberg, welcher ihn abholte, und von dessen Sohne, welcher mit ihm in Berlin studierte, und ihm in seiner ganzen Krankheit mit Freundeszärtlichkeit gepflegt hatte, wofür ihm auch Tönnies mit treuester Anhänlichkeit und Liebe ergeben war. In Frankfurt, wo ich ihn zum letztenmal sah, und mit unnennbarer Wehmuth verließ, hatte er die Freude seine Eltern, welche ihn von da abholten, und nach denen er eine unaussprechliche Sehnsucht hatte, zu sehen. Am 28sten August kam er zu Hause an, am 31ten entschlief er sanft. — Den Tag vor seinem Tode erhielt er noch ein Antwortschreiben der königlich preussischen wissenschaftlichen Prüfungskommis-

---

*) Er besorgte einige Monate hindurch einen Theil des mathematischen Unterrichtes an dem berlinisch-köllnischen Gymnasium, bis ihm eine eingetretene Krankheit dasselbe unmöglich machte.

sion, bey welcher er sich zum Examen in der Mathematik gemeldet hatte, des Inhalts:

„daß es nach den von ihm bekannten Schriften wegen „seiner mathematischen Kenntnisse der Prüfung nicht „weiter bedürfe, und er dergestallt deren entbunden „sey, daß er ohne weiteres die Mathematik in ihrem „ganzen Umfange auf jeder gelehrten Schule vorzu„tragen die Erlaubniß haben und dieses Schreiben als „ein von der Kommission ertheiltes testimonium ho„norificum anzusehen sey.

Von dieser ehrenvollen Meinung, die man von ihm hatte, ist auch ein Beweis, daß er im November 1816 zur Beobachtung der großen Sonnenfinsterniß von der Berliner Akademie der Wissenschaften nach Bütow geschickt wurde.

Die Wahl der Schrift, die er zu übersetzen unternahm, macht seinem Verstande Ehre. Mit Recht zählt Laplace die Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit zu den wichtigsten, womit sich der menschliche Geist beschäftigen kann. Sie gehört aber auch zu den schwierigsten, wenn man sie bis zu dem Umfange ausdehnt, wie von Laplace geschehen ist. Um alle in dieses unermeßliche Gebiet fallende Fragen beantworten zu können, müßte der menschliche Verstand selbst unendlich seyn; aber selbst sehr viele solche Aufgaben, die keinen unendlichen Verstand zur Auflösung erfordern, setzen doch schon genaue Bekanntschaft mit den tiefen Kunstgriffen voraus, womit die größten Analytiker, wie die Bernoullis, Euler, Lagrange und Laplace selbst die Analysis

bereichert haben. In der vorliegenden Schrift konnte es aber nicht darauf abgesehen seyn, solche unendliche Kombinationen wirklich zu entwickeln. Laplace begnügte sich daher damit, hier nur auf solche Verwickelungen aufmerksam zu machen, und theils auf die Schwierigkeiten der Lösung hinzudeuten, theils gewisse allgemeine Grundsätze aufzustellen auf deren Anwendung die Lösung beruhe, ohne diese besondere Anwendung zu zeigen oder auch allemal zeigen zu können. Dagegen findet man aber auch sehr viele minder verwickelte Fälle von sehr großem Interesse, zu deren Entfaltung schon die gemeinen Analysis hinreichend ist. Dem Manuscript des Herrn Uebersetzers waren einige Blätter mit Anmerkungen von demselben beigelegt, um selbst diejenigen, welche mit der gemeine Analysis nicht sehr bekannt sind in den Stand zu setzen, zu den Laplacischen Resultaten zu gelangen, in so weit solche zu ihrer Ableitung keine besondere Kunstgriffe erforden. Ich bin hierdurch zu ähnlichen Anmerkungen veranlaßt worden. Um aber die des Herrn Uebersetzers von den meinigen zu unterscheiden, sind jene mit Buchstaben, diese mit Sternchen (*) bezeichnet worden.

Manchem Leser möchte es doch wohl so vorkommen, als ob man verschiedene Arten von Wahrscheinlichkeiten von einander unterscheiden müsse. Wenn wir z. B. im Julius drei heitere Tage hintereinander gehabt haben, und die Sonne am 4ten Morgen wieder bei heiterem Himmel aufgeht, so ist es wahrscheinlich, daß wir einen heiteren Tag

behalten werden; ganz anders erzählt es sich mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit bei Erscheinungen, die blos von etwas herrühren, was wir Zufall nennen. Wenn z. B. in einer Urne 20 Nummern liegen, unter welchen eine mir zugehört, und nun 18 Nummern gezogen worden sind, so ist es sehr wahrscheinlich, daß sich unter den gezogenen auch die meinige befinde. Aber diese Wahrscheinlichkeit des Zufalls scheint doch von ganz anderer Art als die vorige zu seyn. Indeß, sagt Laplace, hat es mit allen solchen Wahrscheinlichkeitsgraden im Grunde einerlei Bewandniß, wenn auch die wirklichen Ereignisse bloßer Zufall zu seyn scheinen. Liegen z. B. in einem Glücksrade 90 Nummern, von welchen bei jedesmaliger Ziehung 5 Nummern gezogen werden, und kommt eine gewiße Ambe z. B. Nro. 6 und Nro. 24 in den ersten 10 Ziehungen 8 Mal heraus, so liegt darin eine sehr große Irregularität. Noch größer wäre die Irregularität, wenn eine gewiße Terne z. B. die Nummern 8, 10, 27 in 10 Ziehungen 2 Mal herauskäme. Aber diese scheinbaren Abweichungen von den mathematischen Bestimmungen werden die gehörige Regulierung erhalten, wenn eine sehr große Anzahl von Ziehungen genommen wird. Bei 200000 Ziehungen werden alle Amben und alle Ternen so ziemlich gleich vielmal herausgekommen seyn, und noch genauer alle 90 Nummern gleich vielmal, und zwar eben darum, weil jede Nummer durch Zufall erscheint, und für den Zufall immer neue Abwechslungen eintreten können, die daher bei einer sehr großen Anzahl auch gleich vielmal eintreten werden. Nach dieser Vorstellung werden also selbst die zufälligsten Erscheinungen den mathematischen Bestimmungen gemäß erfolgen, wenn die Anzahl nur groß genug genommen wird. Wer bei 900 nach einander folgen-

den Ziehungen jedesmal irgend eine willkührliche Nummer besetzt, bei der Wahrscheinlichkeit des Treffens, die bei jeder Ziehung = 1/18 ist, die Ziehung seiner Nummer 900/18 = 50 Mal erleben, wenn auch mit unter in zehen nach einander folgenden Ziehungen seine Nummer nicht erscheinen sollte. So betrachtet Laplace die Sache, und darum unterscheidet er nicht verschiedene Arten der Wahrscheinlichkeit. Indessen liegt doch meines Erachtens eben in der Forderung, daß die Anzahl von Vorgängen, bei deren jedem ein gewißes Ereigniß möglich ist, bei ganz zufälligen Erscheinungen oft ungeheuer groß seyn muß, um eine Uebereinstimmung mit der mathematischen Bestimmung zu finden, ein wesentlicher Unterschied zwischen ganz zufälligen und solchen Erscheinungen, welche auf ähnlichen Wirkungen der Natur beruhen. Liegen in einer Urne 18000 weiße und 3000 schwarze Kugeln, so ist es wahrscheinlich, daß sich unter den ersten herausgezogenen 14 Kugeln zwei schwarze befinden werden; so ist es auch wahrscheinlich, daß bei 18000 nacheinander folgenden Jahren in den 1ten 14 Jahren 2 gute Weinjahre eintreten werden, aber diese Wahrscheinlichkeit ist doch von anderer Art als die vorige. Ich glaubte, diesen Punkt hier doch nicht ganz übergeben zu dürfen. Uebrigens scheint mir hier auch noch die Bemerkung eine Stelle zu verdienen, daß unsere mannigfaltigen Interpolirungsmethoden, die auf Näherungen gebaut sind und häufig in physisch mathematischen Untersuchungen angewendet werden; gleichfalls zu den Wahrscheinlichkeitsberechnungen gehören oder mit solchen zusammenhängen.

Heidelberg im März 1818.

K. Chr. Langsdorf.

Inhalt.

Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeiten.

Seite.

Von der Wahrscheinlichkeit. ---------------------- 2

Allgemeine Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. ---- 12

Von der Hoffnung. ---------------------------- 27

Von den analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung. ------------------------------ 33

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von den Spielen. ---------------------------- 72

Von den unbekannten Ungleichheiten, die zwischen den für gleich gehaltenen Zufällen Statt finden können. ------ 75

Von den aus unbestimmter Vervielfältigung der Begebenheiten entspringenden Gesetzen der Wahrscheinlichkeit. ------ 78

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Philosophie der Natur. -------------------------- 92

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die moralischen Wissenschaften. ---------------------- 121

Von der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse. ------------ 122

Von den Wahlen und Entscheidungen der Versammlungen. -- 140

	Seite.
Von der Wahrscheinlichkeit der gerichtlichen Urtheile.	144
Von den Sterblichkeitstabellen, der mittlern Lebensdauer, den Ehen und andern Verbindungen.	155
Von den Vortheilen der von der Wahrscheinlichkeit der Begegebenheiten abhangenden Einrichtungen.	165
Von den Täuschungen bei Schätzung der Wahrscheinlichkeiten.	172
Von den verschiedenen Mitteln sich der Gewißheit zu nähern.	187
Historische Notizen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. ..	196

Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeiten.

Gegenwärtiger Versuch ist die weitere Ausführung einer Vorlesung über Wahrscheinlichkeiten, die ich im Jahre 1795 an den Normalschulen hielt, wohin ich mit Lagrange, durch einen Beschluß der Nationalversammlung, als Professor der Mathematik berufen wurde. Erst neulich habe ich über denselben Gegenstand ein Werk unter dem Titel einer analytischen Theorie der Wahrscheinlichkeiten herausgegeben. Hier aber stelle ich, ohne Hülfe der Analysis, die Grundsätze und allgemeinen Ergebnisse dieser Theorie dar, indem ich sie auf die wichtigsten im gemeinen Leben vorkommenden Fragen anwende, die eigentlich meistens nur Wahrscheinlichkeitsaufgaben sind. Man kann sogar behaupten, daß, streng genommen, fast alle unsere Kenntnisse nur wahrscheinlich sind; und selbst bei der geringen Anzahl Gegenstände, welche uns mit Gewißheit bekannt seyn können, wie in den mathematischen Wissenschaften, gründen sich dennoch die Hauptmittel, zur Wahrheit zu gelangen, Induktion und Analogie, auf Wahrscheinlichkeiten, so daß das ganze System menschlicher Erkenntnisse

sich wieder an die in diesem Versuche vorgetragene Theorie anschließt. Dabei wird man gewiß mit Vergnügen bemerken, daß, wenn man nur, selbst bei den ewigen Grundgesezzen der Vernunft, Gerechtigkeit und Menschlichkeit, die mit ihnen beständig verbundenen glücklichen Zufälle betrachtet, ein großer Vortheil mit der Befolgung dieser Grundgesetze und große Nachtheile mit der Vernachläßigung derselben verbunden sind, da ihre Glückspunkte, wie auch die den Lotterien günstigen, doch zulezt immer den Vorrang behaupten, mitten unter den Schwankungen des Zufalls. Möchten die in diesem Versuche vorkommenden Betrachtungen die Aufmerksamkeit der Philosophen verdienen können und sie auf einen Gegenstand lenken, der es so sehr verdient daß sie sich mit demselben beschäftigen.

Ueber Wahrscheinlichkeit.

Alle Ereignisse, selbst wenn sie wegen ihrer Kleinheit von den großen Naturgesetzen nicht abzuhängen scheinen, sind eine eben so nothwendige Folge derselben, als die scheinbaren Bewegungen der Sonne. Bei der Unbekanntschaft mit den Banden, die sie mit dem ganzen Weltsysteme vereinen, ließ man sie von Finalursachen oder dem Zufalle herrühren, je nachdem sie regelmäßig oder ohne scheinbare Ordnung sich zutrugen und auf einander folgten; allein diese eingebildeten Ursachen wurden nach und nach zufolge der geringern oder größern Beschränktheit unserer Erkenntnisse mehr oder weniger zurückgeschoben und verschwinden gänzlich vor der gesunden Philosophie die in ihnen nur den Ausdruck unserer Unbekanntschaft mit den wahren Ursachen erblickt.

Die gegenwärtigen Begebenheiten haben mit den vorhergehenden eine auf dem einleuchtenden Grundsatze beruhende Verbindung, daß ein Ding nicht anfangen kann, zu seyn, ohne eine Ursache, die es hervorbringt. Dieses unter dem Namen des Gesetzes vom zureichenden Grunde bekannte Axiom erstreckt sich sogar auf Handlungen, die man gewöhnlich für gleichgültig hält. Der freiste Wille kann sie nicht ohne einen ihn bestimmenden Beweggrund hervorbringen; denn wenn alle Umstände zweier Lagen einander ähnlich sind und er in der einen handelte, in der andern nicht, so wäre seine Wahl eine Wirkung ohne Ursache; sie wäre dann, was Leibnitz den blinden Zufall der Epikuräer nennt. Die entgegengesetzte Meinung ist eine Täuschung des Geistes, der die flüchtigen Ursachen der Wahl des Willens bei gleichgültigen Dingen aus dem Gesichte verlierend sich überredet, er habe sich von selbst und ohne Beweggründe bestimmt.*)

Wir müssen daher den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines vorigen Zustandes und die Ursache des noch folgenden ansehen. Gäbe es einen Verstand, der für einen gegebenen Augenblick alle die Natur belebenden Kräfte und die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Wesen kennte und zugleich umfassend genug wäre, diese Data der Analysis zu unterwerfen, so würde ein solcher die Bewegungen der größten Weltkörper und des kleinsten Atoms durch eine und dieselbe Formel aus-

*) Aehnliche Aeusserungen findet man in der kleinen Schrift: Ueber menschliche Bestimmung und freien Willen. 1816. L.

drücken; für ihn wäre nichts ungewiß; vor seinen Augen ständen Zukunft und Vergangenheit. Der menschliche Geist hat in der Vollkommenheit, die er der Astronomie zu geben wußte, einen schwachen Schattenriß eines solchen Verstandes aufgestellt. Seine Entdeckungen in der Mechanik und Geometrie, verbunden mit der Entdeckung der allgemeinen Schwere, haben ihn in den Stand gesetzt, durch dieselben analytischen Formeln den vergangenen und zukünftigen Zustand des Weltalls zu umfassen. Durch Anwendung derselben Methode auf einige andere Gegenstände seiner Erkenntnisse hat er es dahin gebracht, die beobachteten Erscheinungen auf allgemeine Gesetze zurückzuführen und die vorauszusehen, welche gegebene Umstände herbeiführen müssen. Alle seine Bemühungen bei dem Forschen nach Wahrheit streben dahin, ihn unaufhörlich dem oben betrachteten Verstande näher zu bringen, von welchem er aber dennoch stets unendlich entfernt bleiben wird. Dieses dem menschlichen Geschlechte eigenthümliche Streben erhebt eben den Mensch über die Thiere; und seine Fortschritte hierin unterscheiden die Nationen und die Zeitalter und begründen ihren wahrhaften Ruhm.

Wir wollen nur bedenken, wie vormals und in einem noch nicht sehr entfernten Zeitraume ein außerordentlicher Regen oder eine übergroße Dürre, ein Komet mit einem sehr langen Schweife, die Finsternisse, die Nordlichter, überhaupt alle außergewöhnlichen Naturerscheinungen, für lauter Zeichen des himmlischen Zorns gehalten wurden. Man rief den Himmel an, ihren schrecklichen Einfluß abzuwenden. Niemals aber erflehte man von ihm, den Lauf der Planeten und der Sonne aufzuhalten; die Beobachtung würde bald das Unnütze solcher Bitten offenbart haben. Da

sich aber jene Erscheinungen in langen Zwischenräumen zutrugen und wieder verschwanden und so der natürlichen Ordnung der Dinge entgegen zu seyn schienen, so dachte man, der Himmel brächte sie hervor und lenkte sie nach Willkühr, um die Verbrecher der Erde zu bestrafen. So verbreitete der lange Schweif des Kometen von 1456. großen Schrecken in Europa, wo man schon über die schnellen Fortschritte der Türken bestürzt war, die kurz zuvor das abendländische Kaiserthum zerstört hatten, und der Papst Callixtus verordnete öffentliche Gebete, in denen man den Komet und die Türken verfluchte. Nach seinem vierten Umlaufe hat dieser Weltkörper in uns ein ganz anderes Interesse geweckt. Die inzwischen erlangte Kenntniß der Gesetze des Weltsystems hatte die durch die Unbekanntschaft mit den wahren Verhältnissen des Menschen zum Weltall entstandene Furcht zerstreut; und da Halley die Identität desselben mit dem Kometen der Jahre 1531., 1607. und 1682. erkannt hatte, so kündigte er seine nächste Rückkehr gegen 1758. oder Ende 1759. an. Die gelehrte Welt erwartete diese Wiederkehr mit Ungeduld, da sie eine der größten in den Wissenschaften gemachten Entdeckungen bestätigen und Seneka's Vorhersagung erfüllen sollte, der bei Gelegenheit der Bahnen dieser Gestirne, die aus ungeheurer Ferne zu uns herniedersteigen, sagt: „Es wird der „Tag kommen, da durch fortgesetztes Studium mehrerer „Jahrhunderte die jetzt noch verborgenen Dinge mit Klar„heit hervorgehen, und die Nachwelt wird erstaunen, daß „so einleuchtende Wahrheiten uns entgangen sind." Clairaut unternahm damals, die Störungen, welche der Komet durch die Einwirkung der beiden größten Planeten, Jupiter und Saturn, erlitten hatte, der Analysis zu unter-

werfen, und setzte nach den weitläuftigsten Rechnungen seinen nächsten Durchgang durch die Sonnennähe auf den Anfang des Aprils 1759. fest, was denn auch die Beobachtung zu bestätigen keineswegs ermangelte. Die Regelmäßigkeit, welche die Sternkunde in der Bewegung der Kometen zeigt, findet ohne Zweifel bei allen Erscheinungen Statt. Die von einem bloßen Luft- oder Dunstkügelchen beschriebene krumme Linie ist eben so bestimmt geordnet, wie die Planetenbahnen, mit dem einzigen Unterschiede, daß wir ihre Gesetze nicht kennen.*)

Die Wahrscheinlichkeit hängt theils von dieser Unwissenheit, theils von unsern Kenntnissen ab. Zuweilen wissen wir, daß sich von drei oder mehr Begebenheiten eine einzige ereignen werde, und doch ist kein Grund vorhanden, daß wir glauben sollten, die eine werde sich wahrscheinlicher zutragen, als die andere. In diesem Zustande von Unbestimmtheit ist es uns unmöglich, ihre Erscheinung mit Gewißheit anzusagen. Indeß ist es vielleicht wahrscheinlich, daß irgend eine dieser Begebenheiten sich nicht zutrage; wenn wir nämlich mehrere gleich mögliche Fälle sehen, die ihrer Erscheinung entgegen sind, und nur ein einziger sie begünstigt.

Die Theorie des Zufalls besteht nur darin, alle gleichartigen Begebenheiten auf eine gewisse Anzahl mög-

---

*) Das Verstürzen eines Bergs und das Wandeln der Verschütteten in dieser Gegend, sagt der Verf. des erwähnten Schriftchens, war von Ewigkeit her vom Allmächtigen als gleichzeitiger Erfolg der von ihm werdenden Kräfte so genau und vollständig berechnet, als der Lauf der Erde um die Sonne. L.

licher Fälle zurückzuführen, das heißt, solcher Fälle, über deren Daseyn wir in gleicher Ungewißheit stehen, und dann die Anzahl der Fälle zu bestimmen, welche für die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit man sucht, günstig sind.*) Das Verhältniß dieser Zahl zu der Anzahl aller möglichen Fälle ist das Maaß dieser Wahrscheinlichkeit, welches also nur in einem Bruche besteht, dessen Zähler der Zahl der günstigen Fälle und der Nenner der Anzahl aller möglichen Fälle gleich ist.

Der hier gegebene Begriff von Wahrscheinlichkeit setzt voraus, daß, wenn die Anzahl der günstigen und aller möglichen Fälle in gleichem Verhältnisse wächst, die Wahrscheinlichkeit dieselbe bleibt. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man zwei Urnen A und B, von denen die erstere vier weiße und zwei schwarze, die zweite nur zwei weiße und eine schwarze Kugel enthält. Nun denke man sich die

*) Die Voraussetzung gleicher Ungewißheit scheint das Günstigseyn einzelner Fälle auszuschließen. Wir würden daher lieber so setzen: ... und dann die Anzahl der einzelnen uns gleich möglich scheinenden Fälle anzugeben, welche in einer angenommenen Bestimmung für den eintretenden Fall enthalten sind. Soll z. B. Jemand von 10 Bäumen, die in einem Garten stehen, 2 errathen, die ich mir in den Sinn genommen habe, so ist in Erwägung zu ziehen, daß die 10 Bäume 45 Amben enthalten; wird mir nun gestattet, 4 Bäume nennen zu dürfen, welche 6 Amben enthalten, so enthält die angenommene Bestimmung der 4 Bäume 6 solcher möglichen Fälle, deren die ganze Anzahl 45 enthält, und die Wahrscheinlichkeit des Errathens ist $6/45$.

L.

beiden schwarzen Kugeln der erstern Urne an einen Faden gebunden, der in dem Augenblicke reißt, wo man eine derselben ergreift; und die vier weißen Kugeln mögen zwei ähnliche Systeme bilden. So wird also jeder Zufall, der bewirkt, daß man eine der Kugeln des schwarzen Systems ergreift, eine schwarze Kugel herausbringen. Stellt man sich jetzt vor, daß die Fäden, welche die Kugeln verbinden, nicht zerreißen, so ist klar, daß sich dadurch die Zahl aller möglichen Fälle eben so wenig verändert, als die Anzahl der für die Herausziehung der schwarzen Kugeln günstigen Fälle; nur wird man zwei Kugeln zugleich aus der Urne ziehen; daher ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel herauszubringen, ganz dieselbe, wie vorher. Dann hat man aber augenscheinlich den Fall der Urne B, mit der bloßen Verschiedenheit, daß die drei Kugeln dieser letztern Urne durch drei Systeme von zwei unveränderlich zusammenhängenden Kugeln dargestellt sind. Hier sind die gleich möglichen Fälle nicht die Herausziehungen der Kugeln, sondern die sie herbeiführenden Glücksumstände, deren Summe, wenn man sie für jede Urne gleich setzt, bei der erstern auf sechs, bei der zweiten auf drei Kugeln vertheilt ist.

Wenn alle Fälle für eine Begebenheit günstig sind, so verwandelt sich ihre Wahrscheinlichkeit in Gewißheit, und ihr Ausdruck wird der Einheit gleich. Unter dieser Ansicht sind Gewißheit und Wahrscheinlichkeit vergleichbar*), ob-

*) Bei der Gewißheit ist die Anzahl möglicher Fehler im Urtheile = 0 (Null) bei der Wahrscheinlichkeit ist sie eine bestimmte Zahl. Es ist aber die 0 mit keiner Zahl vergleichbar. Wir können daher des Verf. Satz von der Vergleichbarkeit der Wahrscheinlichkeit

gleich auch ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Zuständen des Geistes statt findet, da ihm eine Wahrheit streng bewiesen ist, oder er noch eine kleine Quelle von Irrthum erblickt.

Bei Dingen, die nur wahrscheinlich sind, ist die Verschiedenheit der Data, die jeder Mensch von ihnen hat, eine der Hauptursachen der mancherlei Meinungen, welche man über dieselben Gegenstände herrschen sieht. Man setze zum Beispiel, von drei Urnen A, B, C enthalte die eine nur schwarze, die beiden andern nur weiße Kugeln; nun soll man aus der Urne C eine Kugel ziehen, und man verlangt den Grad von Wahrscheinlichkeit, daß diese Kugel schwarz sey.

Wenn man nicht weiß, welche der drei Urnen nur schwarze Kugeln enthält, so daß man gar keine Ursache hat, zu glauben, daß C es eher sey, als B oder A, so erscheinen diese drei Voraussetzungen gleich möglich; und da eine Kugel nur unter der ersten herausgezogen werden kann, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine solche herauszuziehen, gleich einem Drittel. Weiß man aber, daß die Urne A nur weiße Kugeln enthält, so fällt die Unentschiedenheit nur noch auf die Urnen B und C, daher dann die Wahrschein-

---

mit der Gewißheit nicht annehmen. Es kann nur eine Vergleichung zwischen Wahrscheinlichkeit und Unwahrscheinlichkeit statt finden. Im Beispiele der vorigen Anmerkung hatten wir 6 Fälle des Errathens gegen 45 — 6 oder 39 des Fehlens; daher das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit = 6 : 39 oder = 2 : 13 oder auch = $\frac{2}{45}$: $\frac{13}{45}$. Der Nenner ist aber überflüssig.

lichkeit, daß eine aus der Urne C genommene Kugel schwarz sey, ein Halb ist.*) Ferner verwandelt sich diese Wahrscheinlichkeit in Gewißheit, wenn man versichert ist, daß die Urnen A und B nur weiße Kugeln enthalten.**)

So erhält dieselbe Thatsache, wenn sie vor einer zahlreichen Versammlung erzählt wird, verschiedene Grade von Glauben, nach dem Umfange der Kenntnisse der Zuhörer. Wenn der Erzähler innigst davon überzeugt ist und durch Stand und Charakter ein großes Zutrauen einflößt, so wird seine Erzählung, wie wunderbar sie auch sey, in Hinsicht der unaufgeklärten Zuhörer denselben Grad von Wahrscheinlichkeit haben, wie eine von demselben Manne vorgetragene gewöhnliche Begebenheit, und sie werden ihm ihren ganzen Glauben beimessen. Hat jedoch einer von ihnen Gelegenheit gehabt, dieselbe Sache von andern eben so achtungswerthen Männern verwerfen zu hören, so wird er im Zweifel stehen; und die ganze Sache wird von aufgeklärten Zuhörern dann für falsch gehalten werden, wenn sie dieselbe entweder ganz ausgemachten Begebenheiten, oder den unveränderlichen Gesetzen der Natur zuwider finden.

Dem Einflusse der Meinung derer, welche die Menge für die unterrichtetsten hält und denen sie ihr ganzes Zutrauen in Hinsicht der wichtigsten Gegenstände des Lebens zu schenken pflegt, verdanken wir die Verbreitung der Irr-

---

*) D. h. die Wahrscheinlichkeit verhält sich zur Unwahrscheinlichkeit, wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1 : 1$. L.

**) Die Wahrscheinlichkeit verhält sich jetzt zur Unwahrscheinlichkeit wie $1 : 0$ welches der Ausdruck für die Gewißheit ist. L.

thümer, die in Zeiten der Unwissenheit die Welt verdunkelten. Magie und Astronomie geben uns davon zwei große Beispiele. Jene von Kindheit an eingeflößten Irrthümer, die ohne Prüfung angenommen wurden, und nur den allgemeinen Glauben zur Grundlage hatten, sind so sehr lange aufrecht erhalten worden; bis dann endlich der Fortschritt der Wissenschaften sie in dem Geiste aufgeklärter Menschen zerstörte, deren Meinung sie nun auch, durch die Macht der Nachahmung und Gewohnheit, welche sie vorher so allgemein verbreitete, bei dem Volke selbst hat verschwinden lassen. Diese Macht, die gewaltigste Triebfeder der moralischen Welt, verursacht und erhält bei einer ganzen Nation Ideen, die oft denen ganz widersprechen, die sie anderswo mit derselben Herrschaft begründet. Welche Nachsicht sollten wir also nicht für Meinungen haben, die von den unsern verschieden sind, da diese Verschiedenheit gemeiniglich nur von den verschiedenen Gesichtspunkten abhängt, wohin uns die Umstände versetzt haben! Belehren sollten diejenigen, welche wir nicht für hinlänglich unterrichtet halten, aber vorher unsere eigenen Meinungen streng prüfen und ihre gegenseitige Wahrscheinlichkeit mit Unpartheilichkeit untersuchen.

Auch hängt die Verschiedenheit der Meinungen noch von der Weise ab, auf welche jeder den Einfluß der ihm bekannten Data bestimmt. Die Theorie der Wahrscheinlichkeiten beruht auf so feinen Betrachtungen, daß es kein Wunder ist, daß mit denselben Data zwei Rechner verschiedene Resultate finden, vorzüglich bei sehr verwickelten Aufgaben. Wir wollen hier die allgemeinen Grundsätze dieser Theorie aufstellen.

Allgemeine Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Erster Grundsatz.

Der erste dieser Grundsätze ist die Definition der Wahrscheinlichkeit selbst, die, wie oben gezeigt wurde, in dem Verhältnisse der Anzahl der günstigen Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle besteht.*)

Zweiter Grundsatz.

Dieß setzt aber voraus, daß die verschiedenen Fälle gleich möglich sind. Sind sie es nicht, so muß man erst ihre gegenseitige Möglichkeit bestimmen, deren genaue Schätzung einer der delikatesten Punkte der Theorie des Zufalls ist. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe der Möglichkeiten je des günstigen Falles. Wir wollen diesen Grundsatz durch ein Beispiel erklären.

Gesetzt, man werfe ein breites, sehr dünnes Stück Geld in die Luft, dessen beide große einander entgegengesetzte Seiten, von denen die eine Münz, die andere Flach heißen möge, vollkommen ähnlich seyen. Man soll den Grad von Wahrscheinlichkeit suchen, die Münzseite Einmal wenigstens in zwei Würfen obinhin zu bringen. Nun ist klar, daß hierbei vier gleich mögliche Fälle eintreten kön-

*) S. unsere obige Anmerk. zu dieser Definition. L.

nen, nämlich, Münz im ersten und zweiten Wurf; Münz im ersten und Flach im zweiten Wurf; endlich Flach in beiden Würfen. Die drei erstern Fälle sind dem Ereignisse günstig, dessen Wahrscheinlichkeit man sucht, welche daher = 3/4 ist, so daß man drei gegen eins wetten kann, daß Münz wenigstens Einmal in zwei Würfen obenhin kommen werde.*)

Man kann bei diesem Spiele nur drei verschiedene Fälle zählen, nämlich, Münz beim ersten Wurfe, und dann braucht man keinen zweiten zu thun; Flach beim ersten und Münz beim zweiten Wurfe; endlich Flach im ersten und zweiten Wurfe. Dieß würde die Wahrscheinlichkeit auf 2/3 herabbringen, wenn man diese drei Fälle, mit d'Alembert, als gleich möglich ansähe. Aber es ist leicht einzusehen, daß die Wahrscheinlichkeit, Münz im ersten Wurfe zu treffen, 1/2 und die Wahrscheinlichkeit der beiden andern Fälle 1/4 ist.

Der erste Fall ist eine einfache Begebenheit, die den beiden zusammengesetzten Begebenheiten: Münz im ersten und zweiten Wurf und Münz im erstern, Flach im zweiten Wurf, entspricht. Wenn man nun, dem zweiten Grundsatze gemäß, die Möglichkeit 1/2 des Falls, da Münz im erstern Wurfe kommt, zu der Möglichkeit 1/4 des Falles, da Flach im ersten und Münz im zweiten Wurfe fällt, ad-

---

*) Das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit wollen wir in der Folge allemal durch

W : U

bezeichnen. Hier ist W : U = 3 : 1. Keineswegs ist aber das verlangte Ereigniß 3/4 gewiß, auch nicht 3/4 wahrscheinlich. Anm. d. Uebers.

dirt, so erhält man die ¾ für die gesuchte Wahrscheinlichkeit, was mit dem unter der Voraussetzung des Spielens beider Würfe Gefundenen übereinstimmt. Diese Voraussetzung verändert nichts an dem Schicksale dessen, der für den Ausschlag eine Wette anstellt; sie dient nur, die verschiedenen Fälle auf gleich mögliche Fälle zurückzuführen.

Dritter Grundsatz.

Einer der wichtigsten Punkte der Theorie der Wahrscheinlichkeiten und der am meisten zu Täuschungen verleiten kann, ist die Art, auf welche sich die Wahrscheinlichkeiten durch ihre gegenseitigen Verbindungen vermehren oder vermindern. Wenn die Begebenheiten unabhängig von einander sind, so ist die Wahrscheinlichkeit des Daseyns aller zusammen das Produkt ihrer einzelnen Wahrscheinlichkeiten. So ist die Wahrscheinlichkeit, eine Eins mit einem einzigen Würfel zu werfen, ein Sechstel; daher ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Einen mit zwei Würfeln zugleich zu werfen, ein Sechsunddreißigstel. Denn da sich jede der Seiten des einen mit jeder der sechs Seiten des andern verbinden kann, so giebt es hier sechs und dreißig gleich mögliche Fälle, unter denen ein einziger die beiden Einen giebt. Ueberhaupt ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine einfache Begebenheit unter denselben Umständen eine gegebene Anzahl Male hinter einander eintrete, gleich der Wahrscheinlichkeit dieser einzelnen Begebenheit, zu der Potenz erhoben, die diese Anzahl anzeigt.*) So kann, da die auf einander fol-

*) Der Bruch 1/36 ist daher auch die Wahrscheinlichkeit zwei-

genden Potenzen eines echten Bruches unaufhörlich kleiner werden, eine von einer Reihe sehr großer Wahrscheinlichkeiten abhangende Begebenheit äußerst unwahrscheinlich werden. Wenn uns irgend eine Sache durch zwanzig Zeugen überliefert wird, so daß der erste sie dem zweiten, der zweite dem dritten, und so weiter, erzählt hat, und die Wahrscheinlichkeit jedes Zeugnisses wird = $\frac{9}{10}$ gesetzt, so ist dennoch die Wahrscheinlichkeit der auf den Zeugnissen beruhenden Erzählung kleiner, als ein Achtel. Es läßt sich diese Wahrscheinlichkeit mit nichts besser vergleichen, als mit der Abnahme der Deutlichkeit der Gegenstände, wenn mehrere Stücke Glas dazwischen gestellt werden; da schon eine geringe Anzahl Stücke hinreicht, um uns den Anblick eines Gegenstandes zu entziehen, den wir durch ein einziges Stück noch deutlich sehen können. Die Geschichtschreiber scheinen auf diese Abnahme der Wahrscheinlichkeit der Thatsachen, wenn sie durch sehr viele auf einander folgende Generationen gesehen werden, nicht immer geachtet zu haben; wenigstens würden mehrere historische Begebenheiten, die man für gewiß hält, zweifelhaft seyn, wenn man sie dieser Probe unterwürfe.

In den rein mathematischen Wissenschaften haben die entferntesten Folgen dieselbe Gewißheit, wie der Grundsatz, aus welchem sie hergeleitet sind. Bei den Anwendungen der Analysis auf die Physik haben die Folgerungen alle Ge-

---

mal hintereinander mit einem Würfel eine Eins zu werfen, wenn man die Seiten vollkommen gleich annimmt; in diesem Falle, ist $\frac{1}{6}^n$ die Wahrscheinlichkeit n mal hintereinander eine Eins zu werfen. L.

wißheit der Thatsachen oder der Versuche. Aber in den moralischen Wissenschaften, wo jede Folge aus dem ihr Vorhergehenden nur auf eine wahrscheinliche Weise hergeleitet wird, wächst, wenn diese Folgerungen auch noch so wahrscheinlich sind, die Möglichkeit des Irrthums mit ihrer Anzahl und übertrifft zuletzt, bei Schlüssen, die vom Grundsatze sehr weit entfernt sind, die Möglichkeit der Wahrheit.

Vierter Grundsatz.

Wenn zwei Begebenheiten von einander abhängen, so ist die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Begebenheit das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit der ersten Begebenheit in die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn sich die erste Begebenheit zugetragen hat, die zweite Statt finden werde. So ist im vorhergehenden Falle, wo von drei Urnen A, B, C nur zwei weiße und die dritte bloß schwarze Kugeln enthält, die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel aus der Urne C zu ziehen, ⅔, da unter den drei Urnen nur in zweien weiße Kugeln sind. Hat man aber nun aus der Urne C schon eine weiße Kugel gezogen, so fällt die Unentschiedenheit darüber, welche von den Urnen bloß schwarze Kugeln enthalte, nur noch auf die Urnen A und B; daher ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel aus der Urne B zu ziehen, ½, und das Produkt aus ⅔ in ½, oder ⅓, ist also die Wahrscheinlichkeit, aus den Urnen B und C zwei weiße Kugeln zugleich zu ziehen.

An diesem Beispiele zeigt sich der Einfluß vergangener Begebenheiten auf die Wahrscheinlichkeit der zukünftigen. Denn die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel aus der

B zu ziehen, welche ursprünglich $\frac{2}{3}$ war, verwandelt sich in $\frac{1}{2}$, wenn man schon eine weiße Kugel aus der Urne C gezogen hat; sie würde zur Gewißheit werden, wenn man aus der nämlichen Urne eine schwarze Kugel hervorgezogen hätte. Man kann diesen Einfluß vermittelst des folgenden Grundsatzes bestimmen, der ein Zusatz zu dem vorhergehenden ist.

Fünfter Grundsatz.

Wenn man a priori die Wahrscheinlichkeit einer vorgefallenen Begebenheit und auch die Wahrscheinlichkeit einer solchen Begebenheit berechnet, welche aus dieser und noch einer andern Begebenheit, die man erwartet, zusammengesetzt ist; so ist der Quotient, den man erhält, wenn man die zweite Wahrscheinlichkeit durch die erste dividirt, gleich der Wahrscheinlichkeit der erwarteten Begebenheit, geschlossen aus der beobachteten Begebenheit.

Hier bietet sich die von einigen Philosophen berührte Frage dar, nämlich über den Einfluß der Vergangenheit auf die Wahrscheinlichkeit der Zukunft. Gesetzt, bei dem Spiele Münz und Flach sey Münz öfter gefallen, als Flach. Dadurch allein werden wir uns zu dem Glauben geneigt fühlen, daß in den Bestandtheilen des Geldstücks eine fortwährende Ursache vorhanden sey, die das Fallen der Münzseite begünstigt. So ist im gemeinen Leben das beständige Glück ein Beweis von Geschicklichkeit, weshalb glückliche Leute vor andern gut zu gebrauchen sind. Werden wir hingegen durch die Unbeständigkeit der Umstände unaufhörlich zu einem Zustande von absoluter Unentschie-

denheit gebracht, wie, wenn beim Spiele Münz und Flach bei jedem Wurfe eine andere Seite des Geldstücks obenhin fällt, so kann dann die Vergangenheit nicht das geringste Licht über die Zukunft verbreiten, und es wäre ungereimt, diese aus jener berechnen zu wollen.

Sechster Grundsatz.

Jede der Ursachen, denen eine beobachtete Erscheinung zugeschrieben werden kann, läßt sich mit desto größerer Wahrscheinlichkeit voraussetzen, je wahrscheinlicher die Ereignung der Erscheinung ist, wenn man die Wirklichkeit des Daseyns dieser Ursache annimmt; die Wahrscheinlichkeit des Daseyns irgend einer der Ursachen ist demnach ein Bruch, dessen Zähler gleich der Wahrscheinlichkeit der Erscheinung, welche aus dieser Ursache hervorgeht, und dessen Nenner die Summe der ähnlichen Wahrscheinlichkeiten in Bezug auf alle Ursachen ist; wenn diese verschiedenen Ursachen, a priori betrachtet, nicht gleich wahrscheinlich sind, so muß man statt der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, die aus jeder Ursache folgt, das Produkt aus dieser Wahrscheinlichkeit in die Wahrscheinlichkeit der Ursache selbst gebrauchen. Dieß ist der Hauptgrundsatz dieses Zweiges der Analysis des Zufalls, welcher darin besteht, von den Begebenheiten rückwärts auf ihre Ursachen zu schließen.

Dieser Grundsatz erklärt zugleich, weshalb man regelmäßige Erscheinungen einer besondern Ursache zuschreibt. Einige Philosophen sind der Meinung gewesen, solche Erscheinungen wären minder möglich, als andere, und so wäre zum Beispiel, in dem Spiele Münz und Flach, die Kombination, nach welcher Münz zwanzig mal hinter einander

fällt, der Natur nicht so leicht, wie die Kombinationen, da Münz und Flach unregelmäßig gemischt fallen. Diese Meinung setzt aber voraus, daß vergangene Vorfälle einen Einfluß auf die Möglichkeit zukünftiger haben, was keineswegs zuläßig ist. Regelmäßige Kombinationen kommen nur deshalb seltner vor, weil sie weniger zahlreich sind. Wenn wir da eine Ursache suchen, wo wir Symmetrie bemerken, so rührt dieß nicht daher, weil wir eine symmetrische Begebenheit für minder möglich halten, als andere; sondern unser Schluß ist der: Da diese Begebenheit die Wirkung, entweder einer regelmäßigen Ursache, oder des Zufalls ist, so ist die erstere dieser Voraussetzungen wahrscheinlicher, als die zweite. Sehen wir auf einer Tafel Buchdruckertypen in der Ordnung: Konstantinopel, so schließen wir gleich, diese Zusammenstellung sey nicht Wirkung des Zufalls, schließen aber nicht deshalb so, weil sie nicht so möglich ist, wie andere; da, wenn ein solches Wort in keiner Sprache vorkäme, wir keine besondere Ursache desselben vermuthen würden; nun ist aber dieß Wort unter unter uns gebräuchlich, daher es denn ungleich wahrscheinlicher ist, daß jemand die genannten Typen so geordnet habe, als daß die Zusammensetzung durch Zufall entstanden sey.

Hier ist der Ort, das Wort außergewöhnlich zu erklären. In Gedanken bringen wir alle möglichen Ereignisse unter verschiedene Klassen und nennen außergewöhnlich die Begebenheiten derjenigen Klassen, die nur sehr wenige enthalten. So scheint uns bei dem Spiele Münz und Flach der Zufall, da Münz hundertmal hinter einander fällt, außergewöhnlich, weil, wenn die fast unendliche Anzahl der in hundert Würfen möglichen Kombinationen in regelmäßige oder solche Reihen, in denen wir eine leicht

faßliche Ordnung erkennen, und in unregelmäßige vertheilt wird, diese ungleich zahlreicher sind. Eben so halten wir es für außergewöhnlich, wenn eine weiße Kugel aus einer Urne gezogen wird, die unter einer Million Kugeln nur Eine weiße, sonst lauter schwarze enthält, weil wir uns hier nur zwei Klassen von Begebenheiten, in Hinsicht auf die beiden Farben, denken können. Dagegen scheint uns der Zug von Numero 475813, zum Beispiel, aus einer Urne, welche eine Million Nummern enthält, ein gewöhnliches Ereigniß, weil, wenn wir die Nummern einzeln mit einander vergleichen, ohne sie in Klassen zu theilen, kein Grund vorhanden ist, zu glauben, es sey wahrscheinlicher, daß diese oder jene bestimmt herauskomme.*)

Aus dem Vorhergehenden müssen wir überhaupt schließen, daß, je außergewöhnlicher eine Begebenheit ist, sie um

---

*) Genauer betrachtet ist das Außergewöhnliche mit dem Wenigerwahrscheinlichen einerlei. Selbst in des Verf. Beispiele liegt kein Unterschied.

Daß aus einer Urne, welche alle Nummern von 1 bis 1000000 enthält, eine zum voraus angegebene Nummer, wie 475813 bei einem Zuge herauskommen werde, ist eben so unwahrscheinlich und eben so außergewöhnlich, als daß im vorher genannten Falle gerade die weiße Kugel werde gezogen werden. Auch ist es nicht wahrscheinlich, daß diese oder jene schwarze Kugel (wenn man sich die 999999 schwarze Kugeln numerirt denkt) eher herauskommen werde, als gerade die weiße. Wir sehen daher durchaus keinen Nutzen von der Eintheilung möglicher Fälle in gewöhnliche und außergewöhnliche. Anm. des Herausg.

desto mehr der Beglaubigung durch starke Beweise bedarf. Denn da es möglich ist, daß die Zeugen betrügen oder selbst betrogen sind, so sind auch diese beiden Ursachen um so wahrscheinlicher, je weniger es die Wirklichkeit der Begebenheit an sich ist. Besonders wird dieß noch mehr einleuchten, wenn weiter unten von der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse die Rede ist.

Siebenter Grundsatz.

Die Wahrscheinlichkeit eines zukünftigen Ereignisses ist gleich der Summe der Produkte aus der Wahrscheinlichkeit jeder Ursache, welche aus der beobachteten Begebenheit geschlossen wird, in die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn diese Ursache vorhanden ist, die zukünftige Begebenheit Statt finden werde. Folgendes Beispiel wird diesen Grundsatz verdeutlichen.

Gesetzt, eine Urne enthalte nur zwei Kugeln, von welchen jede entweder weiß, oder schwarz ist. Man zieht eine von diesen Kugeln heraus und legt sie dann wieder in die Urne, um noch einmal eine herauszuziehen. Wenn nun in den beiden ersten Malen weiße Kugeln herausgekommen sind, so fragt sich, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, auch noch beim dritten Zuge eine weiße Kugel zu ziehen.

Hier sind nur zwei Voraussetzungen möglich, entweder ist eine Kugel weiß und die andere schwarz, oder beide sind weiß. Unter der ersten Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Erscheinung ¼*); sie ist der Ein-

*) Daß die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Erscheinung

heit gleich oder die Gewißheit selbst unter der zweiten. Wenn man also diese Voraussetzungen wie lauter Ursachen ansiebt, so erhält man nach dem sechsten Grundsatze $1/5$ und $4/5$ als

---

$1/4$ ist, läßt sich so zeigen: Da die Urne eine weiße und eine schwarze Kugel enthält, so sind bei zwei Ausziehungen folgende 4 Fälle, und nicht mehr, möglich:

W S
S W
S S
W W

wovon der letzte der rechte und seine Wahrscheinlichkeit also $1/4$ ist. Sie folgt noch leichter aus dem dritten Grundsatze, da die Wahrscheinlichkeit des Herausziehens einer weißen Kugel in einem Zuge $1/2$ ist, also die Wahrscheinlichkeit der wiederholten Begebenheit $(1/2)^2 = 1/2 \times 1/2 = 1/4$.

Nach dem sechsten Grundsatze ist die Wahrscheinlichkeit der ersten Ursache $= \frac{1/4}{1/4 + 1} = \frac{1/4}{5/4} = 1/5$, und die Wahrscheinlichkeit der zweiten $= \frac{1}{1/4 + 1} = \frac{1}{5/4} = 4/5$.

Es ist $1/5 \times 1/2 + 4/5 \times 1 = 1/10 + 8/10 = 9/10$ = der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Der Uebersetzer.

Wir fügen noch folgendes bei. Die Wahrscheinlichkeit, WW in den beiden ersten Zügen zu ziehen, ist nach vorstehender Erläuterung $= 1/4$, weil von 4 Fällen der verlangte WW nur einer ist. Diese Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Möglichkeit, daß in der Urne die beiden Kugeln S und W liegen könnten; aber in Bezug auf den zweiten möglichen Fall, daß in der Urne die beiden Kugeln WW lägen, wäre die

ihre gegenseitigen Wahrscheinlichkeiten. Findet nun die erste Voraussetzung Statt, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel im dritten Zuge herauszubringen, $\frac{1}{2}$; unter

---

Wahrscheinlichkeit, in den beiden ersten Zügen WW zu ziehen, offenbare Gewißheit, also $= 1$; demnach die Summe der nach den verschiedenen möglichen Fällen vorhandenen Wahrscheinlichkeiten, die WW in den beiden ersten Zügen zu ziehen, $= \frac{1}{4} + 1$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Erfolg nach der ersten Wahrscheinlichkeit eintreten werde, ist also $= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{5}$; die Wahrscheinlichkeit, daß der Erfolg nach der letzteren eintreten werde, ist $= \frac{1}{\frac{1}{4}+1} = \frac{4}{5}$.

Beide Wahrscheinlichkeiten begünstigen die Hoffnung, nach den beiden ersten Zügen mit dem dritten Zuge auch wieder W ziehen zu können, wenn man die beiden erstenmale WW gezogen hätte.

Weil aber nach der ersten noch die Möglichkeit vorhanden ist, daß nach dem zweiten Zuge die beiden Kugeln W und S in der Urne seyen (indem jedesmal die gezogene W wieder hineingelegt wird), so ergiebt sich aus dieser Voraussetzung für die Hoffnung, mit dem dritten Zuge wieder W zu erhalten, nur noch die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß der Erfolg beim dritten Zuge nach der Wahrscheinlichkeit der ersten Voraussetzung (als ob S und W ursprünglich in der Urne lägen) eintrete, ist nur noch $= \frac{1}{10}$. Dagegen bleibt die Wahrscheinlichkeit, daß der Erfolg beim dritten Zuge nach der Wahrscheinlichkeit der zweiten Voraussetzung (als ob blos WW ursprünglich in

der zweiten Voraussetzung ist sie der Einheit gleich; multiplicirt man daher diese letztern Wahrscheinlichkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten der ihnen entsprechenden Voraussetzungen, so ist die Summe der Produkte oder $^9/_{10}$ die Wahrscheinlichkeit, zum dritten Male auch wieder eine weiße Kugel herauszuziehen.

Wenn die Wahrscheinlichkeit einer einfachen Begebenheit unbekannt ist, so kann man für dieselbe alle Werthe von Null bis Eins ohne Unterschied setzen. Die Wahrscheinlichkeit jeder dieser Voraussetzungen ist dann, wenn man sie aus der beobachteten Erscheinung folgern will, nach dem sechsten Grundsatze ein Bruch, dessen Zähler die Wahrscheinlichkeit der Erscheinung unter dieser Voraussetzung und dessen Nenner die Summe der ähnlichen Wahrscheinlichkeiten, in Bezug auf alle Voraussetzungen, ist. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Möglichkeit der Begebenheit zwischen gegebenen Gränzen eingeschlossen sey, der Summe der in diesen Gränzen begriffenen Brüche gleich. Multiplizirt man nun jeden Bruch mit der unter der entsprechenden Voraussetzung bestimmten Wahrscheinlichkeit der zukünftigen Begebenheit, so ist die Summe der Produkte in Be-

---

der Urne lägen) eintrete, nothwendig $= 1. ^4/_5$. Beide Wahrscheinlichkeiten, die $^1/_5$ und die $^4/_5$ kommen dem dritten Zuge zu statten; erstere nur zur Hälfte $= ^1/_{10}$, letztere ganz $= ^8/_{10}$; also die gesammte Wahrscheinlichkeit, auch mit dem dritten Zuge W zu erhalten, $= ^1/_{10} + ^8/_{10} = ^9/_{10}$, so daß die Unwahrscheinlichkeit nur noch $= ^1/_{10}$ bleibt. Die Wahrscheinlichkeit verhält sich demnach zur Unwahrscheinlichkeit, wie 9 zu 1. Anm. des Herausg.

zug auf alle Voraussetzungen, nach dem siebenten Grundsatze, die aus der beobachteten Begebenheit geschlossene Wahrscheinlichkeit des zukünftigen Ereignisses. So findet sich, daß, wenn sich eine Begebenheit eine gewisse Anzahl Male hintereinander zugetragen hat, die Wahrscheinlichkeit, daß sie sich noch das folgende Mal ereignen werde, einem Bruche gleich ist, der diese um Eins vermehrte Anzahl zum Zähler und dieselbe Anzahl, um zwei vermehrt, zum Nenner hat. Läßt man zum Beispiel die älteste Epoche der Geschichte bis auf fünf tausend Jahre oder 1826213 Tage zurückgehen, so wäre, da die Sonne beständig unter dieser Zeit während jeder vier und zwanzigstündigen Umdrehung der Erde aufgegangen ist, 1826214 gegen Eins zu wetten, daß sie auch morgen aufgehen werde. Aber diese Zahl ist ungleich größer für denjenigen, der durch das Studium des Zusammenhangs der Naturerscheinungen zur Kenntniß des den Wechsel der Tage und Jahrszeiten regulirenden Grundgesetzes und dadurch zu der Einsicht gelangt ist, daß im gegenwärtigen Augenblicke nichts deren Lauf zu unterbrechen vermag*).

---

*) Die hier vorgetragene Rechnungsweise des Verf. ist in der That sehr räthselhaft. In jedem Falle ist sie, wie sie da steht, augenscheinlich unanwendbar, wenigstens der Fall ihrer Anwendbarkeit sehr beschränkt und vom Verf. gar nicht angegeben. Hätte man z. B. bei einem Lotto 3mal hinter einander die Zahl 15 gezogen, so wäre die Wahrscheinlichkeit, daß eben diese Zahl auch bei der folgenden 4ten Ziehung wieder herauskommen würde, gewiß nicht = 4/5, oder die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit wie 4 : 1. Wäre auch im Allgemeinen die Erscheinung einer solchen bestimmten

Büffon berechnet in seiner politischen Arithmetik die obige Wahrscheinlichkeit ganz anders. Er setzt voraus, sie sey von der Einheit nur um einen Bruch unterschieden, dessen Zähler Eins und dessen Nenner die Zahl zwei ist, letztere auf eine Potenz erhoben, welche der An-

---

Zahl z. B. = 1/18, so wäre doch die Wahrscheinlichkeit bei der 4ten Ziehung zur Unwahrscheinlichkeit nicht etwa 4 : 17 statt 1 : 17. Im Gegentheil wächst die Unwahrscheinlichkeit des ferneren Erscheinens in solchen Fällen in desto größerem Maaße, je öfter dieselbe Erscheinung schon voran gegangen ist. Umgekehrt kann die Wahrscheinlichkeit einer erfolgenden Wiedererscheinung in einem weit größeren Maaße steigen, als nach des Verf. Angabe. Und wir glauben sogar, daß gerade dieses auf die angeführte Erscheinung von der Sonne anzuwenden seyn mögte. Bemerken wir z. B. in einem ganzen Jahre keine Abweichung, so bleiben wir dennoch am Ende eines Jahres sehr ungewiß, ob nicht eine so kleine Abweichung wirklich vorhanden sey; sie könnte am Ende vor 1000 Jahren sehr bemerkbar seyn. Findet man aber auch nach 1000 Jahren noch keine bemerkbare Abweichung, so ist die Vermuthung, daß gar keine Abweichung Statt habe, nach 1000 Jahren noch gegründeter, als nach einem Jahre, daß also nach tausendmaligem Ablaufe der 1000 Jahre, oder 1 Million von Jahren die Erscheinungen noch eben so erfolgen werden, wie nach einem Jahre. Wir haben also nach 1000 Jahren in Bezug auf die Wiedererscheinung nicht etwa eine nur tausendmal, sondern eine millionmal gegründetere Vermuthung, als nach einem Jahre, daß jene Wiedererscheinung unverändert fortdauern werde.

Anm. des Herausg.

zahl der seit der Epoche verflossenen Tage gleich ist. Allein dieser berühmte Schriftsteller kannte die rechte Weise nicht, wie man von vergangenen Begebenheiten auf die Wahrscheinlichkeit der Ursachen und zukünftigen Ereignisse zu schließen hat.

Von der Hoffnung.

Die Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten dient zur Bestimmung der Hoffnung oder Furcht der bei ihrem Daseyn interessirten Personen. Das Wort **Hoffnung** hat verschiedene Bedeutungen; überhaupt bezeichnet es den Vortheil dessen, der irgend ein Gut unter Voraussetzungen erwartet, die nur wahrscheinlich sind. Dieser Vortheil ist, nach der Theorie des Zufalls, das Produkt aus der gehofften Summe in die Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten; es ist die partielle Summe, welche einem zu Theil werden muß, wenn man die Gefahren der Begebenheit nicht theilen will und voraussetzt, daß die Vertheilung im Verhältniß der Wahrscheinlichkeiten vor sich gehe. Denn diese Vertheilung ist die einzig rechtmäßige, wenn von allen fremden Umständen abstrahirt wird, da man bei einem gleichen Grade von Wahrscheinlichkeit ein gleiches Recht auf die gehoffte Summe hat. Diesen Vortheil wollen wir **mathematische Hoffnung** nennen.

Achter Grundsatz.

Wenn obiger Vortheil von mehreren Begebenheiten abhängt, so **erhält man ihn durch die Addition der Produkte aus der Wahrscheinlichkeit jeder Begebenheit in das mit deren Erscheinung verknüpfte Gut.**

Um diesen Grundsatz an Beispielen anzuwenden, setze man, in dem Spiele Münz und Flach solle Paul zwei Franken erhalten, wenn er Münz im ersten Wurfe obenhin bringt, fünf Franken aber, wenn er dieß erst beim zweiten Wurfe thut. Multiplizirèn wir nun zwei Franken mit der Wahrscheinlichkeit ½ des ersten Falls und fünf Franken mit der Wahrscheinlichkeit ¼ des zweiten Falls, so ist die Summe der Produkte oder zwei und ein viertel Franken Pauls Vortheil. Diese Summe muß er demjenigen zum Voraus geben, der ihm den Vortheil bewilligt hat, da, um Gleichheit des Spiels hervorzubringen, der Einsatz dem Vortheile gleich seyn muß, den es mit sich bringt*).

Erhält Paul zwei Franken, wenn er Münz im ersten Wurfe, und fünf, wenn er es, ohne Rücksicht darauf, ob es beim ersten Wurfe oben war oder nicht, im zweiten Wurfe obenhin bringt, so hat man nun, da die Wahrscheinlichkeit, Münz im zweiten Wurfe zu treffen, auch ½ ist, die zwei und die fünf Franken mit ½ zu multiplizìren, und so erhält man, wenn diese Produkte addirt werden, drei und ei-

---

*) Wiederholt Paul sein Spiel mit 2 Würfen 4mal, so gelingt ihm die Gewinnung des Preises von 2 Franken wahrscheinlich 2mal, die von 5 Franken wahrscheinlich nur 1mal; er gewinnt also wahrscheinlich 2 . 2 + 1 . 5 = 9 Franken; dagegen muß er für die 4fache Wiederholung des Spiels 4 . 2¼ = 9 Franken zum voraus zahlen, womit die Gleichheit in Bezug auf wahrscheinlichen Gewinn hergestellt wird. Gegen die Möglichkeit, alle vorausbezahlten 9 Franken zu verlieren, bleibt ihm auch die Möglichkeit, 4 . 5 = 20 Franken zu beziehen. Anm. des Herausg.

nen halben Franken als Pauls Vortheil und folglich auch als dessen Einsatz zum Spiele.

Neunter Grundsatz.

Bei einer Reihe wahrscheinlicher Begebenheiten, von welchen einige ein Gut, andere einen Verlust hervorbringen, erhält man den daraus entspringenden Vortheil, wenn man die Produkte aus der Wahrscheinlichkeit jeder günstigen Begebenheit in das Gut, welches sie mit sich bringt, addirt und von diesem Aggregate die Summe der Produkte aus der Wahrscheinlichkeit jeder ungünstigen Begebenheit in dem mit ihr verknüpften Verlust subtrahirt. Trifft es sich, daß die zweite Summe größer ist, als die erstere, so verwandelt sich der Vortheil in Verlust, die Hoffnung in Furcht.

Im gemeinen Leben muß man nun stets dafür sorgen, daß, wenn das Produkt aus dem Gewinn, den man sich verspricht, in die Wahrscheinlichkeit dieses Gewinnes auch nicht größer ist, als das Produkt aus dem zu befürchtenden Verluste in dessen Wahrscheinlichkeit, es doch wenigstens diesem gleich sey. Um aber dieß zu können, ist es durchaus erforderlich, nicht nur die Vortheile und Nachtheile selbst, sondern auch deren gegenseitige Wahrscheinlichkeiten genau zu bestimmen. Dazu verhilft aber nur ein sehr richtiger Verstand, eine feine Beurtheilungskraft und große Erfahrung; dabei muß man sich vor Vorurtheilen, vor den Täuschungen der Furcht und Hoffnung, so wie vor den falschen Begriffen von Vermögen und Glück hüten, mit denen die meisten Menschen ihrer Eigenliebe schmeicheln.

Die Anwendung der vorhergehenden Grundsätze auf folgende Frage hat die Geometer viel beschäftigt. Paul spielt Münz und Flach, unter der Bedingung, daß er zwei Franken erhalte, wenn Münz im ersten, vier, wenn es erst im zweiten, acht, wenn es erst im dritten Wurfe fällt, und so fort. Sein Einsatz muß nun hierbei nach dem achten Grundsatze, der Anzahl der Würfe gleich seyn, so daß, wenn das Spiel ohne Ende fort gienge, der Einsatz unendlich groß seyn müßte. Aber ein vernünftiger Mensch würde nicht einmal eine mäßige Summe, zum Beispiel fünfzig Franken, an solch ein Spiel wagen wollen. Woher kommt nun diese Verschiedenheit zwischen dem Resultate der Rechnung und dem Urtheile des gesunden Menschenverstandes? Man sah bald ein, daß dieser Unterschied daher rührt, weil der moralische Vortheil, den ein Gut mit sich bringt, diesem Gute selbst nicht proportional ist und von tausend oft sehr schwer zu bestimmenden Umständen abhängt, von denen aber der allgemeinste und wichtigste die Größe des Vermögens ist. Natürlich hat ja ein Franke viel mehr Werth für jemanden, der nur hundert hat, als für einen Millionär. Daher muß bei dem gehofften Gute dessen absoluter Werth von seinem relativen Werthe unterschieden werden. Dieser richtet sich nach den Beweggründen, die den Wunsch nach ihm in uns hervorbringen, von welchen dagegen jener ganz unabhängig ist. Es läßt sich auch kein allgemeiner Grundsatz angeben, um diesen relativen Werth zu bestimmen. Indeß kann folgender, von Daniel Bernoulli vorgeschlagene, in vielen Fällen angewendet werden.

Zehnter Grundsatz.

Der relative Werth einer unendlich kleinen Summe ist gleich ihrem absoluten Werthe, dividirt durch das Totalvermögen des dabei interessirten Individuums. Dieß setzt voraus, daß jeder Mensch wenigstens soviel Vermögen besitze, daß dessen Werth nicht gleich Null gesetzt werden muß. Auch legt selbst der, wer nichts besitzt, dem Resultate seiner Arbeit und seiner Hoffnungen immer einen Werth bei, der wenigstens so groß ist, wie das, was er zum nothdürftigen Lebensunterhalte bedarf.

Durch Anwendung der Analysis auf diesen Grundsatz ergiebt sich folgende Regel:

Bezeichnet man mit der Einheit denjenigen Theil des Vermögens eines Individuums, der von seinen Erwartungen unabhängig ist, und bestimmt nun die verschiedenen Werthe, welche dieses Vermögen kraft der genannten Erwartungen erhalten kann, und ihre Wahrscheinlichkeiten, so ist das Produkt dieser Werthe, wenn sie gegenseitig auf die von diesen Wahrscheinlichkeiten angezeigten Potenzen erhoben werden, dem physischen Vermögen gleich, welches dem Individuum denselben moralischen Vortheil verschaffen würde, der ihm aus dem als Einheit angenommenen Theile seines Vermögens und aus seinen Erwartungen zu Theil wird; zieht man also die Einheit von diesem Produkte ab, so wird der Unterschied dem Zuwachse des physischen Vermögens gleich seyn, welcher von den Erwartungen abhängt; diesen Zuwachs wollen wir **moralische Hoffnung** nennen. Es ist leicht einzusehen, daß diese mit der mathematischen Hoffnung zusammenfällt, wenn das als Einheit genommene Vermögen in Vergleichung mit den Veränderungen, die es

durch die Erwartungen erhält, unendlich groß wird. Machen aber diese Veränderungen einen merklichen Theil jener Einheit aus, so können beiderlei Hoffnungen sehr merklich von einander verschieden seyn.

Diese Regel führt auf Resultate, welche mit den Urtheilen des gesunden Menschenverstandes übereinstimmen, daher denn letztere durch dieselbe mit einiger Genauigkeit geschätzt werden können. So findet sich bei der vorhergehenden Aufgabe, daß, wenn Pauls Vermögen zwei hundert Franken beträgt, er vernünftiger Weise nicht mehr, als neun Franken aufs Spiel setzen darf. Dieselbe Regel lehrt auch, wie die Gefahr auf mehrere Theile eines Gutes, welches man erwartet, zu vertheilen ist, statt das ganze Gut derselben Gefahr auszusetzen. Eben so folgt daraus, daß selbst bei dem gleichsten Spiele der Verlust immer relativ größer ist, als der Gewinn; denn das Produkt aus dem Vermögen als Einheit genommen, um den Gewinn vermehrt und auf eine Potenz erhoben, die der Wahrscheinlichkeit des Gewinns gleich ist, in diese Einheit, um den Verlust vermindert und auf eine Potenz erhoben, die der Wahrscheinlichkeit des Verlustes gleich ist, ist immer geringer, als das Vermögen des Spielers vor seinem Einsatze. Wird dieß Vermögen zum Beispiel zu hundert Franken angenommen, von welchen der Spieler fünfzig bei dem Spiele Münz und Flach einsetzt, so kann sein Vermögen nach diesem Einsatze, kraft der Erwartung, die er nun hat, entweder hundert und fünfzig Franken oder nur fünfzig werden; die Wahrscheinlichkeit jedes der beiden Fälle ist ½; das Vermögen ist also, nach der vorhergehenden Regel, der Quadratwurzel aus dem Produkte von hundert und fünfzig in fünfzig gleich; so reduzirt es sich auf sieben und achtzig Franken, das heißt,

diese letztere Summe würde dem Spieler denselben moralischen Vortheil verschaffen, wie der Zustand seines Vermögens nach seinem Einsatze. Das Spiel ist also dann sogar nachtheilig, wenn auch der Einsatz dem Produkte aus der gehofften Summe in ihre Wahrscheinlichkeit gleich ist. Daraus läßt sich die Unmoralität der Spiele beurtheilen, in welchen die gehoffte Summe unter diesem Produkte ist. Solche bestehen nur durch falsche Schlüsse und durch die Begierde, welche sie nähren und die, da sie das Volk verleiten, sein Nothdürftiges betrügerischen Hoffnungen aufzuopfern, deren Unwahrscheinlichkeit es nicht zu schätzen versteht, eine Quelle unzähliger Uebel werden.

Von den analytischen Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Anwendung der dargestellten Grundsätze auf die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsaufgaben erfordert Methoden, deren Aufsuchung mehreren Zweigen der Analysis das Daseyn gegeben hat, besonders der Theorie der Kombinationen und der Rechnung mit endlichen Differenzen.

Wenn man das Produkt folgender Binome: Eins plus einem ersten Buchstaben, Eins plus einem zweiten Buchstaben, Eins plus einem dritten Buchstaben, und so fort, bis zu n Buchstaben, bildet und die Einheit von diesem entwickelten Produkte subtrahirt, so hat man die Summe der Kombinationen aller dieser Buchstaben, ein und ein, zwei und zwei, drei und drei, und so weiter, genommen; jede Kombination hat die Einheit zum Koëfficienten *).

---

*) Nämlich, z. B. für 4 Buchstaben a, b, c, d, allgemein: $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b$

Um nun die Anzahl der Kombinationen dieser n Buchstaben, r und r genommen*), zu erhalten, bemerke man, daß, wenn man die Buchstaben einander gleich setzt, das obige Produkt die nte Potenz von dem Binom: Eins plus dem ersten Buchstaben, wird; und so ist die Anzahl der Kombinationen der n Buchstaben, r und r genommen, dem Koefficienten der rten Potenz des ersten Buchstaben in der Entwickelung der nten Potenz des Binoms gleich; man erhält also diese Anzahl durch die bekannte Formel des Binoms**).

Will man auch auf die gegenseitige Lage der Buch-

$$+ c + d) . x^3 \begin{matrix} + ab + ac + ad \\ + bc + bd + cd \end{matrix}\Big\} . x^2 \begin{matrix} + abc + abd \\ + bcd + acd \end{matrix}\Big\} . x$$

$+ a\,b\,c\,d$, wo alle möglichen Verbindungen vorkommen, die sich von a b c und d machen lassen. Setzt man nun $x = 1$, so erhält man $1 + (a + b + c + d) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + (abc + abd + bcd + acd) + a\,b\,c\,d$, wo man nur die 1 weglassen darf, um alle möglichen Verbindungen von a, b, c, d zu haben. L.

*) D. h. solche Kombinationen verstanden, deren jede r Buchstaben enthält. Z. B. für die Kombinationen ab, ac, ad, bc, bd, cd in der vorigen Anmerkung ist $r = 2$. L.

**) Setzt man nämlich $b = c = d = a$, so wird $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) = (1 + a)^4 = 1 + 4a + 6a^2 + 4a^3 + a^4$. Die hier nach der 1 folgenden Koefficienten 4, 6, 4, 1 bestimmen die Anzahl von Kombinationen nach 1, 2, 3, 4 Buchstaben, die sich aus a, b, c, d machen lassen, wie solche in obiger Anmerkung wirklich angegeben worden sind. L.

staben in jeder Kombination Rücksicht nehmen, so darf man nur bedenken, daß, wenn man zu dem ersten Buchstaben noch einen zweiten hinzufügt, dieser vor und hinter dem ersten stehen kann, welches schon zwei Kombinationen giebt. Setzt man zu diesen einen dritten Buchstaben, so kann man ihn vor oder hinter jede von den beiden Kombinationen oder auch in die Mitte derselben stellen, wodurch aus jeder der beiden Kombinationen drei werden, also in allem sechs Kombinationen entstehen. Hieraus ist leicht zu schließen, daß die Anzahl der verschiedenen Stellungen, welche man r Buchstaben geben kann, dem Produkte aller ganzen Zahlen von Eins bis r gleich ist. Um also auf die gegenseitige Lage der Buchstaben Rücksicht zu nehmen, muß man mit diesem Produkte die Anzahl der Kombinationen der n Buchstaben, immer r und r zusammen genommen, multipliciren oder, welches einerlei ist, den Nenner des Koefficienten des binomischen Ausdrucks, der jene Anzahl bezeichnet, weglassen*).

---

*) Der Koefficient des ersten Gliedes nach der 1 in der Entwickelung von $(1 + a)^n$ ist $= n$ oder $= \frac{n}{1}$; der 2te ist $\frac{n.(n-1)}{1.2}$; der 3te $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$ rc. Diese Ausdrücke geben also die jedesmalige Anzahl von Kombinationen nach 1, nach 2, nach 3 u. s. f. Buchstaben, die sich aus n Buchstaben machen lassen, wenn dabei ab und ba, und so auch abc, acb, bac, bca, cab, cba als gleich geltend nur für eine Kombination nach zweien oder nach dreien angenommen werden. Man sieht, daß eine einzige solche Kombination nach dreien, wie a, b, c nothwendig 2, 3 oder 6 Kombinationen geben müsse, wenn die möglichen Ordnungen in

Gesetzt, eine Lotterie bestehe aus n Nummern, und bei jedem Zuge kommen r heraus; man verlangt die Wahrscheinlichkeit, daß s gegebene Nummern bei einem Zuge herauskommen. Um diese zu erhalten, bestimme man zuerst die Anzahl Kombinationen von n minus s Nummern, immer r minus s und r minus s zusammen genommen; denn es ist einleuchtend, daß wenn man die s gegebenen Nummern zu jeder dieser Kombinationen fügt, man die Summe aller Kombinationen der n Buchstaben, r und r genommen, erhält, in welchen die s gegebenen Nummern vorkommen. Dividirt man nun jene Anzahl Kombinationen durch die Anzahl der Kombinationen aller n Buchstaben, r und r genommen, so hat man die gesuchte Wahrscheinlichkeit. So läßt sich zeigen, daß diese Wahrscheinlichkeit dem Verhältnisse der Anzahl Kombinationen von r Buch-

---

der Stellung der Buchstaben neben einander mit berücksichtigt werden sollen. Denn eine Kombination von 3 Buchstaben kann sowohl mit a, als mit b und mit c anfangen; dieses giebt abc, bac, cab; aber die beiden nach dem ersten folgenden Buchstaben in jeder dieser 3 Kombinationen leiden wieder 2 verschiedene Stellungen (wie 1) bc, 2) cb; 1) ac, 2) ca; 1) ab, 2) ba). Man erhält statt der Anzahl $\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ die $2.3\,\frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3}$ oder schlechthin $n.(n-1)(n-2)$ Verbindungen nach dreien mit Rücksicht auf die verschiedenen Stellungen der Buchstaben.

staben, s und s genommen, zu der Anzahl Kombinationen von n Buchstaben, s und s genommen, gleich ist *).

Nach diesem Satze kann man, zum Beispiel, die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens bei der französischen Lotterie berechnen und daraus den Vortheil des Einsatzes in dieselbe herleiten. Diese Lotterie besteht aus 90 Nummern, von denen fünf bei jeder Ziehung herauskommen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein gegebener Zug herauskomme, nach obigem Satze $\frac{5}{90}$ oder $\frac{1}{18}$; folglich müßte dann die Lotterie, damit das Spiel auf beiden Seiten gleich wäre, den Einsatz achtzehnfach zurückgeben. Die Anzahl aller Kombinationen zu zwei und zwei von 90 Nummern ist

---

*) Befinden sich in einem Glücksrade n Nummern, und kommen mit jedem Zuge 10 Nummern heraus, so werden von den in den n Nummern enthaltenen Kombinationen von s, z. B. von 4 Nummern, also von $\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ Kombinationen überhaupt $\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}$ dergleichen Kombinationen gezogen. Es ist also die Wahrscheinlichkeit für die Erscheinung einer bestimmten Kombination $= \frac{\left[\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\right]}{\left[\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\right]}$ $= \frac{10.9.8.7}{n.(n-1)(n-2)(n-3)}$. Der Zähler ist die Anzahl der in 10 Nummern enthaltenen Quaternen, der Nenner die Anzahl der Quaternen in n Nummern. Für n = 100 wäre die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{18672,5}$.

L.

4005, und solcher kommen bei jeder Ziehung zehn heraus; demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine gegebene Ambe herauskomme, $^{10}/_{4005}$; also müßte die Lotterie bei dem Herauskommen einer Ambe den Einsatz vier hundert und ein halbmal wiedergeben. Eben so findet sich, daß sie den Einsatz 11748fach für eine Terne, 511038fach für eine Quaterne und 43949268fach für eine Quinte herausgeben müßte. Die Lotterie hütet sich wohl, den Spielern solche Vortheile zu gewähren*).

Wir wollen noch annehmen, daß von n in einer Urne

---

*) Die hier erwähnte Lotterie ist das bekannte oder berüchtigte Lotto di Genua. Ganz dieselben Bestimmungen findet man in den schon vor 40 Jahren von mir herausgegebenen Erläuterungen über die Kästnersche Analysis endlicher Größen. Wir wollen hier noch eine besondere Frage beifügen, die bei diesem Lotto vorkommen kann, wie sich nämlich die Wahrscheinlichkeit bestimmen lasse, daß von den nach einander herauskommenden 5 Zahlen, die wir mit a, b, c, d und e bezeichnen wollen, die beiden zuerst herauskommenden gerade meine Ambe c e, und zwar in eben dieser Ordnung, zuerst c dann die e, geben. Hier giebt es für die beiden ersten herauskommenden Zahlen 10 verschiedene Amben, nämlich $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$; es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß meine Ambe mit den beiden ersten Zügen herauskommen werde $= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{400,5} = \frac{1}{4005}$. Aber mit Rücksicht auf die verschiedenen Stellungen der beiden Nummern bei jeder Ambe sind 5 . 4 = 20 verschiedene Amben für die beiden ersten Züge

enthaltenen Kugeln es gleich möglich sey, immer eine allein, oder zwei zugleich, oder drei zugleich, und so fort, herauszuziehen; nun sey eine dieser Ziehungen geschehen, und man verlangt die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der herausgekommenen Kugeln ungerade sey. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß, wenn man das Binom: eins plus eins, auf die Potenz n erhebt, der zweite, dritte Ausdruck, und so weiter, die Mengen der Kombinationen der n Kugeln, eine und eine, zwei und zwei, und so fort, genommen, bezeichnet; also wird die Anzahl aller Kombinationen der nten Potenz von zwei, minus eins, gleich seyn; die Summe des zweiten, vierten, sechsten Ausdrucks, und so weiter, der Entwickelung des Binoms wird die Anzahl der ungeraden Kombinationen seyn; es erhellt leicht, daß diese der Hälfte des Unterschiedes der nten Potenzen der Binome eins plus eins und eins minus eins gleich ist, das heißt, der Hälfte der nten Potenz von zwei. Zieht man eins von dieser Hälfte ab, so hat man die Anzahl der geraden Kombinationen, und dividirt man diese beiden Anzahlen von Kombinationen durch ihre Summe, so ergeben sich die gegenseitigen Wahrscheinlichkeiten der ungeraden und geraden Kombinationen. Es ist also vortheil-

---

möglich 1) $\left\{\begin{array}{c} ab, ac, ad, ae, \\ bc, bd, be, \\ cd, ec, de, \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{c} ba, ca, da, ea, \\ cb, db, eb, \\ dc, ec, ed, \end{array}\right.$

unter welchen nur die einzige ce die meinige ist.

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{400,5}$ $= \frac{1}{8010}$. Das Treffen einer so bestimmten Ambe ist also immer noch weit wahrscheinlicher, als das Treffen einer Terne überhaupt. L.

hafter, für eine ungerade, als für eine gerade Anzahl herausgekommener Kugeln zu wetten.

Aber die allgemeinste und direkteste Methode, die Wahrscheinlichkeitsaufgaben aufzulösen, besteht darin, sie von Differenzgleichungen abhängig zu machen. Vergleicht man die auf einander folgenden Zustände der Funktion der veränderlichen Größen, welche die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, wenn man diese veränderlichen Größen um ihre gegenseitigen Differenzen wachsen läßt, so giebt die gegebene Aufgabe meistens ein sehr einfaches Verhältniß zwischen den verschiedenen Zuständen dieser Funktion. Dieses Verhältniß heißt eine Gleichung mit gewöhnlichen oder mit partialen Differenzen; mit gewöhnlichen, wenn nur eine, mit partialen, wenn mehrere veränderliche Größen darin sind. Wir wollen einige Beispiele davon geben.

Drei Spieler, deren Geschicklichkeiten gleich gesetzt werden, spielen unter folgenden Bedingungen mit einander. Derjenige der beiden ersten Spieler, der seinem Gegner ein Spiel abgewinnt, spielt mit dem dritten, und wenn er es diesem auch abgewinnt, so ist das ganze Spiel zu Ende. Verliert er aber, so spielt nun sein Gegner mit dem andern und so fort, bis einer der Spieler den beiden andern hinter einander ein Spiel abgewonnen hat, welches dem Ganzen ein Ende macht. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Spiel in einer gegebenen Anzahl Male geendigt sey. Wir wollen zuerst die Wahrscheinlichkeit suchen, daß es genau bei einem bestimmten Male, zum Beispiel beim zehnten Male, aufhöre. Wenn dieß der Fall seyn soll, so muß der Spieler, welcher das Ganze gewinnt, beim neunten Male zum Spielen kommen und sowohl dieses, als auch das folgende Mal gewinnen. Verliert er aber,

statt beim neunten Male zu gewinnen, gegen seinen Gegner, so endet, da dieser schon gegen den andern Spieler gewonnen hat, das Spiel bei diesem Male; also ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spieler beim neunten Male zum Spielen komme und in diesem Male gewinne, eben so groß wie die Wahrscheinlichkeit, daß das ganze Spiel genau bei diesem Male aufhören werde; und da dieser Spieler auch noch das folgende Mal gewinnen muß, wenn das Spiel mit dem zehnten Male zu Ende seyn soll, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses letztern Falles nur die Hälfte der vorhergehenden. Daraus folgt, daß, wenn man diese Wahrscheinlichkeit wie eine Funktion der Nummer des Males ansieht, bei welchem das Spiel enden soll, diese Funktion die Hälfte derselben Funktion seyn wird, in der die Nummer des Males oder die veränderliche Größe um eins geringer ist. Diese Gleichheit bildet eine der sogenannten Gleichungen mit gewöhnlichen endlichen Differenzen.

Vermittelst dieser Gleichung kann man nun leicht die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß das Spiel genau bei irgend einem Male aufhören werde. Es ist einleuchtend, daß es nicht eher, als beim zweiten Male zu Ende seyn kann; soll dieß aber seyn, so muß derjenige der beiden ersten Spieler, der gegen seinen Gegner gewinnt, beim zweiten Male auch gegen den dritten Spieler gewinnen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel bei diesem Male endigen werde, ½. Daraus folgt, nach der obigen Gleichung, daß die auf einander folgenden Wahrscheinlichkeiten der Endigung des Spieles ¼ für das dritte Mal, ⅛ für das vierte Mal, und so weiter, sind, und im Allgemeinen ½, auf eine Potenz erhoben, welche um eins geringer ist, als die Nummer des Males. Addirt man jetzt alle diese

Potenzen, von der ersten bis zu dieser letzten inclusive, so hat man die Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel in der durch jene Nummer bezeichneten Anzahl Male zu Ende seyn werde, die daher auch der um die letzte dieser Potenzen von ½ verminderten Einheit gleich ist.

Wir wollen hier noch die erste unter allen Wahrscheinlichkeitsaufgaben, welche aufgelöset wurde, und deren Auflösung Fermat von Pascal aufgegeben erhielt, betrachten. Zwei Spieler A und B, deren Geschicklichkeiten gleich sind, spielen unter der Bedingung mit einander, daß derjenige, welcher dem andern zuerst eine gegebene Anzahl Male das Spiel abgewonnen hat, der Sieger ist und ihm die Summe alles Eingesetzten gebührt. Nach einigen Malen kommen die Spieler überein, aufzuhören, und das Spiel ungeendigt zu lassen; und man verlangt nun, zu wissen, wie sie die Summe theilen müssen. Natürlich müssen ihre Antheile ihren gegenseitigen Wahrscheinlichkeiten, das Spiel zu gewinnen, proportional seyn; die Frage läuft also darauf hinaus, diese Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. Sie hängen augenscheinlich von der Anzahl Male ab, welche jedem Spieler noch an der gegebenen Anzahl Male fehlen; also ist die Wahrscheinlichkeit von A eine Funktion dieser beiden Zahlen, die wir als eben so viel veränderliche Größen ansehen werden. Wenn beide Spieler übereinkämen, noch ein Mal mehr zu spielen, (welche Uebereinkunft ihr Loos übrigens gar nicht änderte), so würde entweder A gewinnen, und dann nähme die ihm fehlende Anzahl Male um eins ab, oder B, und dann würde sich die diesem fehlende Anzahl Male um eins vermindern; aber die Wahrscheinlichkeit jedes dieser Fälle ist ½; demnach ist die gesuchte Funktion der Hälfte dieser Funktion gleich, wenn man die erste ver-

änderliche Größe in derselben um eins vermindert, plus der Hälfte derselben Funktion, wenn man die zweite veränderliche Größe derselben um eine Einheit verringert. Diese Gleichheit ist eine der sogenannten Gleichungen mit partialen Differenzen.

Man kann nun mit Hülfe derselben die Wahrscheinlichkeiten von A bestimmen, indem man von den kleinsten Zahlen ausgeht und bemerkt, daß die Wahrscheinlichkeit oder die Funktion, welche sie ausdruckt, der Einheit gleich ist, wenn dem Spieler A kein Mal mehr fehlt, oder die erste veränderliche Größe Null ist, und daß diese Funktion auch Null wird, wenn die zweite veränderliche Größe verschwindet. Setzt man also voraus, daß A noch ein Spiel zu gewinnen hat*), so findet sich seine Wahrscheinlichkeit ½, ¾, ⅞, und so weiter, je nachdem B noch ein, oder

---

*) Die Art, wie Laplace diese Aufgabe berechnet, stellt folgendes Schema dar:

	A	B	A	B	A	B
I.	1	1	0	1	1	0

$$\tfrac{1}{2} = \overset{1}{\tfrac{1}{2}} + \overset{0}{0}$$

	A	B	A	B	A	B
II.	1	2	0	2	1	1

$$\tfrac{3}{4} = \overset{1}{\tfrac{1}{2}} + \overset{1/2}{\tfrac{1}{4}}$$

	A	B	A	B	A	B
III.	1	3	0	3	1	2

$$\tfrac{7}{8} = \overset{1}{\tfrac{1}{2}} + \overset{3/4}{\tfrac{3}{8}}$$

	A	B	A	B	A	B
IV.	2	1	1	1	2	0

$$\tfrac{1}{4} = \overset{1/2}{\tfrac{1}{4}} + \overset{0}{0}$$

zwei, oder drei, und so weiter, Male fehlen. Ueberhaupt ist sie dann gleich eins, weniger ½ auf eine Potenz erhoben, welche der B mangelnden Anzahl Male gleich ist.

$$\text{V.}\quad A_2 \quad B_2 \quad A_1 \quad B_2 \quad A_2 \quad B_1$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \tfrac{3}{4} \qquad\quad \tfrac{1}{4}$$

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8}$$

$$\text{VI.}\quad A_2 \quad B_3 \quad A_1 \quad B_3 \quad A_2 \quad B_2$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \tfrac{7}{8} \qquad\quad \tfrac{1}{2}$$

$$\tfrac{11}{16} = \tfrac{7}{16} + \tfrac{1}{4}$$

Wir fügen dieser Anmerk. des Uebersetzers noch folgende nähere Erläuterung bei:

No. I. bezeichnet

1) $A_1\ B_1$ den Fall, wo A sowohl als B noch ein Spiel gewinnen müßte, um gesiegt zu haben.

2) $A_0\ B_1$ den Fall, wo zu diesem Zweck dem A kein Spiel mehr fehlt, hingegen dem B noch eines.

3) $A_1\ B_0$ den Fall, wo dem A noch eines, dem B keines mehr fehlt.

In No. II. ist also das fehlende für A um 1 geringer als No. I., hingegen das fehlende für B wie in No. I.

In No. III. ist das Fehlende für B um 1 geringer als in No. I., hingegen das Fehlende für A wie No. I.

Offenbar ist nun No. II. der Sieg schon für A entschieden, also die Wahrscheinlichkeit des Siegs für A schon Gewißheit geworden, oder = 1; dieses wird durch den Ausdruck $\underset{0}{A_0\ B_1}$ angedeutet.

No. III. ist der Sieg schon für B entschieden, also

Setzt man ferner voraus, A habe noch zwei Spiele zu gewinnen, so findet man seine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{16}$, und so weiter, je nachdem B noch ein, oder zwei, oder drei

---

die Wahrscheinlichkeit des Siegs für A schon = o geworden; dieses wird durch den Ausdruck $\underset{0}{A_{1}\,B_{0}}$ angedeutet. Der Fall No. I. liegt zwischen den beiden No. II. und No. III. Daher ist es in diesem Falle (No. I.) die Wahrscheinlichkeit des Siegs für A die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beiden vorigen 1 und o oder = $\frac{1}{2}$. Dieses wird No. I. durch $\underset{\frac{1}{2}}{A_{1}\,B_{1}}$ angedeutet. Ebenso ergeben sich die Fälle von No. II. bis No. IV. Neben jeder Nummer hat man wie neben No. I. 3 verschiedene Ausdrücke, wo No. II. und III. schon in einem vorhergehenden Falle zu finden sind, und No. I. die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den Wahrscheinlichkeiten No. II. und III. angiebt.

2) Man kann die Aufgabe auch so ansehen: Wenn A noch 1mal und B noch 2mal zu gewinnen hat, so ist es gleich wahrscheinlich, daß A oder B gewinnt, wenn noch ein Spiel gemacht wird. Gewinnt A, so bommt er die ganze Summe = 1. Verliert A (was eben so wahrscheinlich ist), so gewinut B, und sie stehen nun so, daß beide noch 1mal zu gewinnen haben, in welchem Falle sie offenbar das, was auf dem Spiele steht, gleich unter sich zu theilen haben und folglich A $\frac{1}{2}$ bekommt. Wird nun nicht gespielt, so ist es also für A eben so wahrscheinlich, 1 oder $\frac{1}{2}$ zu bekommen; er hat also Anspruch auf $\frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$.

Spiele, und so fort, zu gewinnen hat. So kann man nun fortfahren, indem man weiter voraussetzt, A habe noch drei Spiele zu gewinnen, und so fort.

Dieß läßt sich fortgesetzt so darstellen:

A B
1 2

A gewinne, so bekommt er 1
A verliere, so bekommt er ½

$\frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4}$ für A.

A B
1 3

A gewinne, (A 0, B 3), so bekommt er 1
A verliere, (A 1, B 2), so bekommt er ¾ (nach dem vorigen).

$\frac{7}{4} : 2 = \frac{7}{8}$ f. A.

A B
2 1

A gewinne (A 1, B 1), so bekommt er ½
A verliere (A 2, B 0), so bekommt er 0

$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$ f. A.

A B
2 2

A gewinne (A 1, B 2), so bekommt er 3/4 (nach dem ersten
A verliere (A 2, B 1), so bekommt er ¼ (nach dem vorigen)

$1 : 2 = \frac{1}{2}$ für A.

A B
2 3

A gewinne (A 1, B 3), so bekommt er ⅞ (nach dem zweiten)
A verliere (A 1, B 2), so bekommt er ½ (nach d. vorigen)

$1\frac{1}{8} : 2 = \frac{11}{16}$ f. A.

3) Noch anders läßt sich die Sache so ansehen: Wenn A noch 2 und B noch 3 Spiele zu gewinnen hat, so muß der Gewinn des Ganzen entschieden seyn, wenn noch 4 Spiele gemacht werden. Nennt man nun den

Indeß ist es langwierig und mühsam, die auf einander folgenden Werthe einer Größe auf diese Weise, vermittelst ihrer Differenzgleichung, zu erhalten; und daher ha-

---

Fall, wo A gewinnt, a, und den Fall, wo B gewinnt, b, und läßt nun in Gedanken die 4 Spiele machen, so können diese auf folgende 16 verschiedene Arten ausfallen:

1) a a a a	5) a b a a	9) b a a a	13) b b a a
2) a a a b	6) a b a b	10) b a a b	14) b b a b
3) a a b a	7) a b b a	11) b a b a	15) b b b a
4) a a b b	8) a b b b	12) b a b b	16) b b b b

Nun gewinnt A, der nur zweimal zu gewinnen braucht, bei 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, also 11mal unter 16 möglichen Fällen. Sein Anspruch erstreckt sich also auf $^{11}/_{16}$.

Hat A 1mal und B 1mal zu gewinnen, so gewinnt A vor B in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, also 8mal, bekommt folglich $^{8}/_{16} = ½$.

Hat A 1mal und B 2mal zu gewinnen, so gewinnt A vor B in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, also 12mal, bekommt folglich $^{12}/_{16} = ¾$.

Hat A 1mal und B 3mal zu gewinnen, so gewinnt A vor B in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, also 14mal, bekommt folglich $^{14}/_{16} = ⅞$.

Hat A 2mal und B 1mal zu gewinnen, so gewinnt A vor B in 1, 2, 3, 4, also 4mal, bekommt folglich $^{4}/_{16} = ¼$.

Hat A 2mal und B 2mal zu gewinnen, so gewinnt A vor B in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, also 8mal, bekommt demnach $^{8}/_{16} = ½$.

Hat A 2mal und B 3mal zu gewinnen, so gewinnt

den die Geometer Methoden gesucht, um die allgemeine Funktion der veränderlichen Größen, welche dieser Gleichung Genüge leistet, zu finden, so daß man für jeden besondern

---

A vor B in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, also 11mal, bekommt folglich $^{11}/_{16}$.

4) Nach läßt sich die Aufgabe so betrachten, daß man annimmt, A und B würfelten mit einem Würfel, auf dem nur 2 Seiten beschrieben sind, die eine mit 1, die andere mit 2, oder mit einem Geldstück, auf dessen einer Seite die Zahl 1, auf der andern die Zahl 2 stehe. Wenn nun A noch 2mal und B noch 3mal zu gewinnen hat, so kann man sich vorstellen, da in 4 Spielen der Gewinn entschieden seyn muß, es würde erst mit einem, dann mit zwei, dann mit drei, dann mit vier solchen zweiseitigen Würfeln geworfen, und A gewänne, wenn 1, B aber gewänne, wenn 2 fällt.

Wird nun mit einem Würfel allein geworfen, so sind nur 2 Fälle möglich, nämlich:

1
2 }. Hierbei kann A nicht gewinnen. A = 0.

Mit 2 Würfeln sind folgende Fälle möglich:

+ 1 1
1 2
2 1
2 2 }. A gewinnt unter 4 Fällen 1mal. A = ¼.

Mit 3 Würfeln hat man folgende Fälle:

1 1 1
1 1 2
+ 1 2 1
+ 2 1 1
1 2 2
2 2 1
2 1 2
2 2 2 } A gewinnt unter 8 Fällen 2mal. A = ¼. (Denn da A mit zwei Würfeln nicht gewonnen hat, wenn noch mit drei Würfeln geworfen werden muß, so sind der 1. und 2. Fall nicht mitzuzählen.)

Fall nur in diese Funktion die entsprechenden Werthe der veränderlichen Größen zu substituiren braucht. Wir wollen diesen Gegenstand allgemein betrachten. Zu dem Ende denke man sich eine Reihe in einer horizontalen Linie auf einander folgender Ausdrücke, die so beschaffen sind, daß sich jeder von ihnen aus den vorhergehenden nach einem gegebenen Gesetze ableitet; dieses Gesetz sey durch eine Gleichung zwischen mehreren auf einander folgenden Ausdrücken und ihrem Zeiger oder der Zahl dargestellt, welche die Stelle bezeichnet, die sie in der Reihe einnehmen; eine solche Gleichung nenne ich eine **Gleichung endlicher Differenzen mit einem veränderlichen Zeiger.** Die Ordnung oder der Grad dieser Gleichung ist die Differenz der Stelle ihrer beiden äußersten Ausdrücke. Man kann mit Hülfe derselben nach und nach die Ausdrücke der Reihe bestimmen und sie ins unbestimmte fortsetzen; dann muß man aber eine dem Grade der Gleichung gleiche An-

---

Mit 4 Würfeln sind folgende Fälle möglich:

1111	
1112	
1121	
1211	
2111	
1122	A gewinnt unter 16 Fällen 3mal.
+ 1221	$A = 3/16$.
+ 2211	(Die übrigen Fälle sind nicht mitzuzählen,
1212	da, wenn zum 4ten Male gewürfelt wer-
+ 2121	den muß, A in den 3 ersten Malen nicht
2112	gewonnen haben kann.)
1222	
2212	
2122	
2221	
2222	

L.

zahl von Ausdrücken der Reihe kennen. Diese Ausdrücke sind die willkührlichen beständigen Größen in der Gleichung für den allgemeinen Ausdruck der Reihe oder in dem Integrale der Differenzgleichung.

Jetzt wollen wir uns über den Ausdrücken der vorhergehenden Reihe eine zweite aus horizontal geordneten Ausdrücken bestehende Reihe vorstellen, und über den Ausdrücken dieser zweiten noch eine dritte horizontale Reihe, und so ins Unendliche fort; ebenfalls seyen die Ausdrücke aller dieser Reihen durch eine allgemeine Gleichung zwischen mehreren, sowohl in horizontaler, als vertikaler Richtung auf einander folgenden Ausdrücken und den Zahlen, welche ihre Stelle in beiden Richtungen bezeichnen, mit einander verbunden. Diese Gleichung nenne ich eine Gleichung partialer endlichen Differenzen mit zwei veränderlichen Zeigern.

Eben so wollen wir uns über der Ebene, welche die vorhergehenden Reihen enthält, eine zweite ähnliche Reihen enthaltende Ebene denken, deren Ausdrücke gegenseitig über den Ausdrücken in der ersten Ebene stehen mögen. Ferner denken wir uns über dieser zweiten Ebene noch eine dritte, die ähnliche Reihen enthält, und so ins Unendliche fort. Nun seyen auch alle Ausdrücke dieser Reihen durch eine Gleichung zwischen mehreren auf einander folgenden Ausdrücken, sowohl in der Richtung der Länge, als in den Richtungen der Breite und Höhe genommen, und den drei ihre Stelle in diesen Richtungen bezeichnenden Zahlen mit einander verbunden. Eine Gleichung dieser Art nenne ich eine Gleichung partialer endlicher Differenzen mit drei veränderlichen Zeigern.

Endlich, um die Sache abstrakt und unabhängig von

aller Raumausdehnung zu betrachten, wollen wir uns überhaupt ein System von Größen vorstellen, welche Funktionen von einer beliebigen Anzahl veränderlicher Zeiger seyen, und uns zwischen den Größen, ihren Differenzen, in Bezug auf die Zeiger, und den Zeigern selbst soviel Gleichungen, wie Größen denken; dann sind dieß Gleichungen partialer endlicher Differenzen mit einer willkührlichen Anzahl veränderlicher Zeiger.

Vermittelst derselben kann man nach und nach jene Größen bestimmen. So wie aber die Gleichung mit einem Zeiger erfordert, daß eine gewisse Anzahl Ausdrücke der Reihe bekannt sey, so erfordert die Gleichung mit zwei Zeigern, daß man eine oder mehrere Reihenlinien kenne, von deren allgemeinen Ausdrücken jeder durch eine willkührliche Funktion eines der Zeiger ausgedrückt seyn kann. Eben so erfordert die Gleichung mit drei Zeigern, daß eine oder mehrere Reihenebenen bekannt seyen, von deren allgemeinen Ausdrücken jeder durch eine willkührliche Funktion zweier Zeiger ausgedrückt seyn kann, und so fort. In allen diesen Fällen kann man durch auf einander folgende Eliminationen irgend einen Ausdruck der Reihen bestimmen. Da aber alle Gleichungen, zwischen welchen eliminirt wird, in einem und demselben Systeme von allgemeinen Gleichungen enthalten sind, so müssen alle die auf einander folgenden Ausdrücke, welche man durch die Eliminationen erhält, in einem allgemeinen Ausdrucke enthalten seyn, der eine Funktion der die Stelle des Ausdrucks bestimmenden Zeiger ist. Dieser allgemeine Ausdruck ist das Integral der gegebenen Differenzgleichung und dessen Aufsuchung ein Gegenstand der Integralrechnung.

Taylor hat zuerst in seinem vortrefflichen Werke, Me-

thodus Incrementorum (Methode der Zunahmen) betitelt, die linearischen Gleichungen mit endlichen Differenzen betrachtet. Er giebt darin die Methode, die linearischen Gleichungen der ersten Ordnung zu integriren, die einen veränderlichen Koeffizienten haben und deren letzter Ausdruck eine Funktion des Zeigers ist. Eigentlich sind die Beziehungen der Ausdrücke arithmetischer und geometrischer Progressionen die einfachsten Fälle linearischer Gleichungen mit Differenzen; aber man hatte sie noch nicht unter diesem Gesichtspunkte betrachtet, da doch diese Ansicht zu denjenigen gehört, die, da sie sich an allgemeine Theorien anschließen, zu diesen Theorien selbst geführt haben und dadurch wahre Entdeckungen geworden sind.

Um dieselbe Zeit betrachtete Moivre unter der Benennung wiederkehrender Reihen die linearischen Gleichungen mit endlichen Differenzen von einer beliebigen Ordnung und mit beständigen Koeffizienten; zugleich erfand er eine sehr sinnreiche Methode, sie zu integriren. Da es immer interessant ist, den Gang der Erfinder zu verfolgen, so will ich hier Moivre's Weg darstellen, indem ich ihn auf eine wiederkehrende Reihe anwende, bei welcher die Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Ausdrücken gegeben ist. Zuerst betrachtet er die Beziehung zwischen den auf einander folgenden Ausdrücken einer geometrischen Progression oder die Gleichung mit zwei Ausdrücken, welche dieselbe darstellt. Indem er sie nun auf die um eine Einheit niedrigern Ausdrücke beziehet, multiplizirt er sie in diesem Zustande mit einem beständigen Faktor und subtrahirt das Produkt von der ursprünglichen Gleichung. Dadurch erhält er eine Beziehung zwischen drei auf einander folgenden Ausdrücken der geometrischen Progression. Hierauf be-

trachtet Moivre eine zweite geometrische Progression, deren Exponent der so eben gebrauchte Faktor selbst ist. Er vermindert ebenfalls um eine Einheit den Zeiger der Ausdrücke der Gleichung dieser neuen Progression, multiplizirt sie in diesem Zustande mit dem Exponenten der erstern Progression, subtrahirt das Produkt von der ursprünglichen Gleichung und erhält so zwischen drei auf einander folgenden Ausdrücken der zweiten Progression eine Beziehung, welche der für die erstere Progression gefundenen ganz ähnlich ist. Dann bemerkt er, daß, wenn die beiden Progressionen, Ausdruck für Ausdruck, zu einander addirt werden, dieselbe Beziehung zwischen jeden drei dieser auf einander folgenden Summen Statt findet. Nun vergleicht er die Koeffizienten dieser Beziehung mit den Koeffizienten der Beziehung der Ausdrücke in der gegebenen wiederkehrenden Reihe und findet zur Bestimmung der Verhältnisse der auf einander folgenden Ausdrücke beider Progressionen eine Gleichung vom zweiten Grade, deren Wurzeln diese Verhältnisse sind. Dadurch zerlegt Moivre die wiederkehrende Reihe in zwei geometrische Progressionen, von denen jede mit einer willkührlichen beständigen Größe multiplizirt ist, welche er vermittelst der beiden ersten Ausdrücke der wiederkehrenden Reihe bestimmt. Dieses sinnreiche Verfahren ist im Grunde dasselbe, welches Lagrange nachher zur direkten Integration der linearischen Gleichungen endlicher Differenzen mit beständigen Koeffizienten gebraucht hat.

Seitdem habe ich die linearischen Gleichungen mit endlichen partialen Differenzen, anfänglich unter dem Namen wiederkehrender Reihen, darauf unter ihrer eigentlichen Benennung, betrachtet. Die allgemeinste und einfachste Methode, alle jene Gleichungen zu integriren, ist mei-

ner Meinung nach diejenige, welche ich auf die Betrachtung der erzeugenden Funktionen gegründet habe, deren Grundbegriff folgender ist.

Denkt man sich eine Funktion A einer veränderlichen Größe, die in eine nach den Potenzen dieser veränderlichen Größe aufsteigende Reihe entwickelt ist, so ist der Koeffizient jeder dieser Potenzen eine Funktion des Exponenten oder des Zeigers der Potenz. Nun nenne ich A eine e r z e u g e n d e F u n k t i o n jenes Koeffizienten oder der Funktion des Zeichens.

Multiplizirt man jetzt die Reihe A mit einer linearischen Funktion der veränderlichen Größe, zum Beispiel mit eins, plus dem Doppelten dieser veränderlichen Größe, so wird das Produkt eine neue erzeugende Funktion seyn, in welcher der Koeffizient irgend einer Potenz der veränderlichen Größe gleich ist dem Koeffizienten derselben Potenz in A, plus dem Doppelten des Koeffizienten der um eine Einheit geringern Potenz. Also wird die Funktion des Zeigers, in dem Produkte, gleich seyn der Funktion des Zeigers in A, plus dem Doppelten derselben Funktion, in welcher der Zeiger um eins vermindert ist. Diese Funktion des Zeigers in der Entwickelung des Produkts ist also eine von der Funktion des Zeigers in A abgeleitete Funktion, die man durch eine vor diese letztere Funktion gesetzte Karakteristik andeuten kann. Die durch diese Karakteristik bezeichnete Ableitung hängt von der multiplizirenden Funktion ab, die wir B nennen und, wie A, nach den Potenzen der veränderlichen Größe entwickelt voraussetzen wollen.

Multiplizirt man das Produkt A mal B noch einmal mit B oder, welches einerlei ist, A mit dem Quadrate von B, so bildet man dadurch eine dritte erzeugende Funktion,

in welcher der Koeffizient irgend einer Potenz der veränderlichen Größe eine ähnliche von dem entsprechenden Koeffizienten des letztern Produktes abgeleitete Funktion seyn wird; man kann daher demselben durch dieselbe Karakteristik, die vor der vorhergehenden abgeleiteten Funktion steht, bezeichnen, so daß also diese Karakteristik zweimal vor den entsprechenden Koeffizienten der Reihe A geschrieben wird. Statt sie aber zweimal zu schreiben, kann man ihr auch die Zahl zwei zum Exponenten geben.

Wenn auf diese Weise fortgefahren wird, so erhellt, daß überhaupt, wenn A mit der nten Potenz von B multiplizirt wird, man den Koeffizienten irgend einer Potenz der veränderlichen Größe in dem Produkte dadurch erhält, daß man vor den entsprechenden Koeffizienten von A die Karakteristik mit dem Exponenten n setzt.

Gesetzt, B sey die Einheit, durch die veränderliche Größe dividirt; dann ist in dem Produkte A mal B der Koeffizient einer Potenz der veränderlichen Größe dem Koeffizienten der um eins höhern Potenz in A gleich, woraus folgt, daß in dem Produkte aus A in die nte Potenz von B dieser Koeffizient dem Koeffizienten der um n Einheiten höhern Potenz in A gleich seyn wird.

Es bedeute C die Einheit, durch die veränderliche Größe dividirt, minus eins; dann wird in dem Produkte A mal C der Koeffizient einer Potenz der veränderlichen Größe dem Koeffizienten der um eins höhern Potenz in A, minus dem Koeffizienten jener Potenz in derselben Reihe A gleich seyn, er ist also die endliche Differenz dieses letztern Koeffizienten, wenn man in demselben das Zeichen sich um eine Einheit verändern läßt. Folglich ist in dem Produkte

aus A in die nte Potenz von C der Koeffizient die nte Differenz des entsprechenden Koeffizienten von A.

Da hier B eins plus C ist, so ist die nte Potenz von B derselben Potenz des Binoms eins plus C identisch gleich. Wenn also diese beiden Potenzen mit A multiplizirt werden, so sind die beiden dadurch entstehenden Produkte identisch. Nun ist in dem Produkte aus A in die nte Potenz von B der Koeffizient irgend einer Potenz der veränderlichen Größe, wie wir gesehen haben, der Koeffizient der um n Einheiten höhern Potenz in A; er ist also die Funktion des um die Zahl n vermehrten Zeigers. In dem Produkte aus A in das entwickelte Binom eins plus C erhält man nach dem Vorhergehenden die entsprechenden Koeffizienten, wenn man, statt der Produkte aus A in die auf einander folgenden Potenzen von C in die auf einander folgenden Differenzen der Funktion des Zeigers in A schreibt und mit dieser Funktion den von C unabhängigen Ausdruck multiplizirt. Man erhält also irgend eine Funktion des um die unbestimmte Größe n vermehrten Zeigers, welche durch die Koeffizienten der Ausdrücke der entwickelten nten Potenz des Binoms eins plus eins, die gegenseitig mit der Funktion selbst und ihren auf einander folgenden Differenzen multiplizirt sind, ausgedrückt ist; welches die Interpolation der Reihen vermittelst der Differenzen ihrer auf einander folgenden Ausdrücke giebt. Nimmt man also die Reihe A so an, daß, zum Beispiel, die zweite Differenz ihrer Koeffizienten Null ist, so hört die vorhergehende Darstellung der Funktion des um die unbestimmte Größe n vermehrten Zeigers nach ihren beiden ersten Ausdrücken auf und enthält als willkührliche Größen, welche von jener unbestimmten Größe unabhängig sind, die Werthe der Funktion und ihrer ersten Differenz, wenn die

unbestimmte Größe Null ist. So erhält man das Integral der Gleichung mit endlichen Differenzen, welches dadurch gegeben ist, daß die zweite Differenz der Funktion des Zeigers gleich Null ist.

Da die erzeugende Funktion der nten Differenz des Koeffizienten von A das Produkt aus A in die nte Potenz von C ist, so wird, wenn man dieses Produkt mit A′ bezeichnet, A die erzeugende Funktion der nten Integrale von A′ seyn, vorausgesetzt, daß nicht Rücksicht auf die willkührlichen beständigen Größen genommen werde, welche die Integrationen einführen. Da nun A gleich ist A′, durch die nte Potenz von C dividirt, so sieht man, daß sich die erzeugende Funktion der Differenzen in die erzeugende Funktion der Integrale verwandelt, wenn man darin den Exponenten der Potenz von C negativ nimmt. Diese Uebereinstimmung macht den Grund der zwischen den positiven Potenzen und den Differenzen, so wie zwischen den negativen Potenzen und den Integralen bemerkten Aehnlichkeit aus.

Wenn B immer die durch die veränderliche Größe dividirte Einheit und D eine rationale und ganze Funktion dieses Quotienten bedeutet, welche Funktion wir, um die Sache zu vereinfachen, vom zweiten Grade setzen wollen: so wird das Quadrat von B einer Funktion von B und D gleich seyn, in welcher B nur im ersten Grade vorkommt. Multiplizirt man beide Glieder dieser Gleichung mit B und eliminirt aus dem zweiten Gliede das Quadrat von B vermittelst seines Ausdruckes, so erhält man die dritte Potenz von B, durch eine Funktion von B und D ausgedrückt, die auch nur die erste Potenz von B enthalten wird. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man dahin gelangen, die nte Potenz von B durch eine ähnliche Funktion auszudrücken

Uebrigens verschafft auch die Analysis zu diesem Zwecke allgemeine und einfache Mittel. Hierauf multiplizire man jene Potenz und ihren Ausdruck mit A und gehe von den erzeugenden Funktionen auf ihre Koeffizienten über, so wird der Koeffizient irgend einer Potenz der veränderlichen Größe in dem Produkte aus A in die nte Potenz von B, wie wir gefunden haben, der Koeffizient von A seyn, in welchem der Zeiger um die Zahl n vermehrt ist. Der Koeffizient derselben Potenz, in Beziehung auf den von B und D unabhängigen Ausdruck, wird das Produkt aus diesem Ausdrucke in den Koeffizienten von A seyn. Der Koeffizient des Produkts A mal D wird eine von dem Koeffizienten von A abgeleitete Funktion seyn, die wir mit einer neuen vor diesen Koeffizienten gesetzten Karakteristik bezeichnen werden. Der Koeffizient des Produkts aus A in eine Potenz von D wird durch diese mit dem Exponenten der Potenz affizirte und vor den Koeffizienten von A gesetzte Karakteristik ausgedrückt werden. Endlich wird man den Koeffizienten des Produkts aus A mal B in eine Potenz von D dadurch ausdrücken, daß man jene mit dem Exponenten der Potenz affizirte Karakteristik vor den Koeffizienten von A setzt, in welchem man den Zeiger um eine Einheit vermehrt. So erhält man also die Funktion des um eine unbestimmte Größe n vermehrten Zeigers, in einer nach den Potenzen der von D abhangenden Karakteristik geordneten Reihe ausgedrückt. Dieser Ausdruck, eine Verallgemeinerung des vorhergehenden Ausdrucks in endlichen Differenzen, wird um so konvergirender seyn, je näher die Koeffizienten von A den Beziehungen Genüge leisten, welche dann eintreten, wenn die Potenzen der Karakterik gleich Null werden.

Wenn ihre erste Potenz Null wird, so werden es da-

durch auch die folgenden Potenzen, und dann ist der vorhergehende Ausdruck das vollkommenen Integral der Gleichung mit linearischen endlichen Differenzen, welches sich durch jenes Nullwerden darstellt.

Ferner wollen wir uns A als eine Funktion von zwei veränderlichen Größen vorstellen. (Was aber hier gesagt werden wird, gilt für jede Anzahl veränderlicher Größen.) Entwickelt man es nun in eine nach den Potenzen jener veränderlichen Größen und ihren Produkten geordnete Reihe, so wird der Koeffizient des Produkts irgend zweier Potenzen in dieser Entwickelung eine Funktion der Zeichen dieser Potenzen seyn, wovon A die erzeugende Funktion ist.

Multiplizirt man A mit einer linearischen Funktion der beiden veränderlichen Größen, zum Beispiel mit Eins, plus dem Doppelten der ersten, minus dem Dreifachen der zweiten veränderlichen Größe; so ist das Produkt eine neue erzeugende Funktion, in welcher der Koeffizient des Produkts irgend zweier Potenzen der veränderlichen Größe gleich seyn wird, dem Koeffizienten des Produkts derselben Potenzen in A, plus dem Doppelten desselben Koeffizienten, in welchem man den Zeiger der ersten veränderlichen Größe um Eins vermindert, minus dem Dreifachen desselben Koeffizienten, in welchem der Zeiger der zweiten veränderlichen Größe um eine Einheit vermindert wird. Man kann auch diesen neuen Koeffizienten durch eine vor den Koeffizienten von A gesetzte Karakteristik bezeichnen. Diese Karakteristik wird von dem Multiplikator von A abhängen, welchen Multiplikator wir B nennen wollen. Hier wird sich nun, wie oben, zeigen, daß der entsprechende Koeffizient in dem Produkte aus A in irgend eine Potenz von B durch jene Karakteristik ausgedrückt wird, wenn man sie immer noch vor dem Koeff-

zienten von A stehen läßt und ihr den Exponenten der Potenz von B zum Exponenten gibt. Daraus folgen Sätze, welche den sich auf eine veränderliche Größe beziehenden analog sind. Auf eine ähnliche Weise läßt sich jede beliebige Funktion zweier gegenseitig um zwei unbestimmte Größen n und n′ vermehrten Zeiger in eine nach den Potenzen einer Karakteristik geordnete Reihe entwickeln. Dieß soll an einem Beispiele gezeigt werden.

Es sey B der Quotient, welcher entsteht, wenn die Einheit durch die erste veränderliche Größe, B′, wenn sie durch die zweite veränderliche Größe dividirt wird, und C sey gleich B, minus einem Vielfachen von B′, minus einer beständigen Größe. Folglich wird die nte Potenz von B derselben Potenz des Trinoms: C. plus dem Vielfachen von B, plus der beständigen Größe; gleich seyn; und also ist das Produkt aus A in die nte Potenz von B, wenn es noch mit der n′ten Potenz von B′ multiplizirt wird, dem Produkte aus A mal der entwickelten nten Potenz jenes Trinoms in die n′te Potenz von B′ identisch gleich. Nun wollen wir von den erzeugenden Funktionen auf ihre Koeffizienten übergehen. Der Koeffizient des Produkts irgend zweier Potenzen der beiden veränderlichen Größen, in dem Produkte aus A mal die nte Potenz von B in die n′te Potenz von B′, wird dem ähnlichen Koeffizienten von A gleich seyn, wenn man in diesem die Zeiger der beiden veränderlichen Größen gegenseitig in die unbestimmten Größen n und n′ vermehrt. Derselbe Koeffizient in dem Produkte aus A in eine Potenz von B′ ist der Koeffizient von A, in welchem der Zeiger der zweiten veränderlichen Größe um den Exponenten dieser Potenz vermehrt ist. Endlich ist dieser Koeffizient in dem Produkte aus A mal eine Potenz von B′ in

eine Potenz von C dem Koeffizienten von A gleich, in welchem der Zeiger der zweiten veränderlichen Größe um den Exponenten der Potenz von B′ vermehrt ist, und von welchem die sich auf C beziehende und mit dem Exponenten der Potenz von C affizirte Karakteristik steht. So erhält man eine Funktion von zwei gegenseitig um die unbestimmten Größen n und n′ vermehrten Zeiger, die in einer Reihe von Ausdrücken dargestellt ist, welche von derselben Funktion abhangen, in der der zweite Zeiger allein vermehrt ist, und von ähnlichen Ausdrücken, vor welchen sich die auf einander folgenden Potenzen der Karakteristik befinden. Wenn die Koeffizienten von A die durch diese Karakteristik bezeichnete Funktion Null machen, so erhält man das Integral der linearischen Gleichung mit partialen Differenzen, welches durch jenes Nullwerden dargestellt wird, und eine willkührliche Funktion der unbestimmten Größe n′ enthält.

Jetzt wollen wir zu den erzeugenden Funktionen mit Einer veränderlichen Größe zurückkommen und sie, wie vorher mit A bezeichnen. Ist nun B eine Funktion dieser veränderlichen Größe und C eine andere Funktion derselben, so kann man B wie eine Funktion von C ansehen, die in eine nach den Potenzen von C geordnete Reihe entwickelt ist. Also wird das Produkt aus A in diese Reihe dem Produkte A mal B identisch gleich seyn; und auch die Koeffizienten einer und derselben Potenz der veränderlichen Größe sind in beiden Produkten identisch gleich. Aber in dem Produkte A mal B ist dieser Koeffizient dem mit einer sich auf B beziehenden Karakteristik affizirten Koeffizienten von A gleich. In dem Produkte des entwickelten und in Bezug auf C geordneten Ausdrucks von B ist der Koeffizient irgend einer Potenz von C dem mit einer neuen sich auf C beziehenden Karakteristik

affizirten Koeffizienten von A gleich, dessen Exponent der Exponent dieser Potenz ist, indem man blos den Koeffizienten von A hinschreibt, wenn dieser Exponent Null ist: so erhält man also den Ausdruck einer durch eine erste Karakteristik bezeichneten abgeleiteten Funktion, in einer nach den Exponenten einer neuen Karakteristik geordneten Reihe. Man sieht, daß man, um diese Reihe zu bilden, das heißt, um von den erzeugenden Funktionen auf ihre Koeffizienten überzugehen, nur in B, welches wie eine Funktion von C betrachtet wird, die neue Karakteristik statt C zu substituiren, diesen Ausdruck von B in eine nach den Potenzen dieser Karakteristik geordnete Reihe zu entwickeln, und dann den Koeffizienten einer unbestimmten Potenz der veränderlichen Größe in A hinter jede Potenz der Karakteristik und hinter den ersten Ausdruck der Reihe zu schreiben braucht. Da nun dieser Koeffizient irgend eine Funktion des Zeichens der Potenz der veränderlichen Größe ist, so reduzirt sich die Verwandlung einer von dieser Funktion abgeleiteten und mit einer ersten Karakteristik bezeichneten Funktion in eine nach den auf einander folgenden Exponenten der Karakteristik einer neuen von derselben Funktion abgeleiteten Funktion geordnete Reihe auf die Entwickelung der Funktionen in Reihen.

Es sey B gleich Eins, dividirt durch die veränderliche Größe, minus Eins, und C gleich Eins, dividirt durch die Potenz i der veränderlichen Größe, minus Eins: so ist die nte Potenz von C gleich der entwickelten nten Potenz der Größe: Eins, plus B, auf die Potenz i erhoben, minus Eins. Multiplizirt man beide nte Potenzen mit A und geht von den erzeugenden Funktionen auf ihre Koeffizienten über, so ist der sich auf das Produkt aus A in die nte Potenz von

C beziehende Koeffizient der nten endlichen Differenz des entsprechenden Koeffizienten in A gleich, indem sich der Zeiger um i Einheiten verändert. Der diesem ähnliche Koeffizient des Produkts aus A in eine Potenz von B wird die auf der Ordnung dieser Potenz stehende endliche Differenz des Koeffizienten von A seyn, indem sich der Zeiger um eine Einheit verändert; man erhält also auf diese Weise die nte endliche Differenz einer Funktion mit dem sich um i Einheiten veränderten Zeiger in einer Reihe der Differenzen derselben Funktion des sich um eine Einheit veränderten Zeigers. In diesem Ausdrucke können sich die Differenzen in Integrale verwandeln, wenn man darin n negativ setzt.

Aus allem vorhergehenden zeigt sich, daß die sich auf die Verwandlungen der Funktionen beziehenden algebraischen Operationen auf die Karakteristiken übergehen, wenn man ihnen die Exponenten der ihnen entsprechenden Größen zu Exponenten gibt.

Wenn man in einer Funktion mit einem sich um die Einheit verändernden Zeiger diesen Zeiger einem andern mit einer beständigen Größe multiplizirten Zeiger gleich macht, so wird die Veränderung dieses neuen Zeigers die beständige Größe selbst seyn. So wird man die Formeln, welche sich auf die Funktionen beziehen, deren Zeiger sich um die Einheit verändert, in andere verwandeln, die sich auf die Funktionen beziehen, deren Zeiger sich um irgend eine beständige Größe verändert.

Setzt man die Zunahme der Zeiger unendlich klein, oder einige endlich und die andern unendlich klein: so gelten doch die bei endlichen Zunahmen derselben bestehenden Resultate immer noch, vereinfachen sich aber, da die unendlich kleinen Größen von einer Ordnung, die höher ist, als die-

jenige, welche man beibehält, wegfallen. Diese Uebergänge von dem Endlichen auf das unendlich Kleine gewähren den Vortheil, daß sie die schwierigen Punkte der Analysis des Unendlichen aufhellen, die der Gegenstand großer Streitigkeiten unter den Geometern gewesen sind. Auf diese Weise habe ich die Möglichkeit bewiesen, unzusammenhangende Funktionen in die Integrale der Gleichungen mit partialen Differentialen einzuführen, vorausgesetzt, daß die Diskontinuität nur für diejenigen Differentiale der Funktionen Statt habe, die von der Ordnung dieser Gleichungen sind. Die transzendenten Resultate der Rechnung sind, wie alle Obstraktionen des Verstandes, allgemeine Zeichen, deren wahre Ausdehnung man nur dadurch erkennen kann, daß man mit Hülfe der metaphysischen Analysis auf die Elementarideen zurückgeht, welche dazu geführt haben, wobei aber oft große Schwierigkeiten in den Weg treten; denn der menschliche Geist findet deren noch weniger, wenn er vorwärts schreiten, als wenn er in sich selbst zurückgehen soll.

Der Uebergang von dem Endlichen auf das unendlich Kleine verbreitet ein großes Licht über die Theorie der Differential-Rechnung. Man sieht durch solchen Uebergang deutlich, daß diese Rechnung weiter nichts ist, als die Vergleichung der Koeffizienten derselben Potenzen der Differentiale, bei der Reihenentwickelung identisch gleicher Funktionen der gegenseitig um unbestimmte Differentiale vermehrten Zeiger. Die Größen, welche man als unendlich kleine Größen vernachläßigt, deren Ordnung höher ist, als diejenige, die man beibehält, und welche durch dieses Wegfallen der Rechnung die Schärfe der Algebra zu benehmen scheinen, sind nur Potenzen der Differentiale, die höher sind, als diejenigen Potenzen, deren Koeffizienten man vergleicht,

und müssen daher bei dieser Vergleichung außer Acht gelassen werden; so daß die Differentialrechnung dieselbe Genauigkeit hat, wie alle andern algebraischen Operationen. Wendet man sie aber auf Geometrie und Mechanik an, so ist es unvermeidlich, das Prinzip der Gränzen dabei einzuführen. Die Subtangente einer krummen Linie, zum Beispiel, ist die geometrische Gränze der Subsekante oder die Linie, der sich dieß um so mehr nähert, je enger die Durchschnittspunkte der Sekante mit der krummen Linie an einander rücken; folglich muß eben so der analytische Ausdruck der Subtangente die Gränze des analytischen Ausdrucks der Subsekante seyn; jener ist also dem ersten Gliede dieses letztern Ausdrucks gleich, wenn derselbe nach den Potenzen des die Ordinaten der beiden Durchschnittspunkte trennenden Zwischenraums entwickelt wird.

Man kann auch die Tangente als die gerade Linie ansehen, deren Gleichung der Gleichung der krummen Linie beim Berührungspunkte am nächsten kommt. Die Ordinate der krummen Linie ist eine Funktion der Abszisse; wenn man daher, von diesem Punkte ausgehend, die Abszisse um eine unbestimmte Größe wachsen läßt, nach deren Potenzen die Funktion entwickelt sey, so ist deutlich, daß die Summe der beiden ersten Glieder dieser Entwickelung die Ordinate der sich der Kurve am meisten nähernden geraden Linie, das heißt, die Ordinate der Tangente seyn wird; und folglich wird der Koeffizient der unbestimmten Größe im zweiten Gliede das Verhältniß der Ordinate zur Subtangente ausdrücken. Durch das Prinzip der Gränzen läßt sich leicht erweisen, daß jede andere durch den Berührungspunkt gezogene gerade Linie die Kurve nahe bei diesem Punkte schneiden würde.

Diese besonders glückliche Methode, den Ausdruck der Subtangenten zu erhalten, verdanken wir Fermat, der sie auf die transzendenten Kurven ausgedehnt hat. Dieser große Geometer bezeichnet den Zuwachs der Abszisse mit der Karakteristik E und bestimmt, indem er nur die erste Potenz dieses Zuwachses betrachtet, genau so, wie es durch die Differentialrechnung geschieht, die Subtangenten der krummen Linie, ihre Berührungspunkte und die Maxima und Minima ihrer Ordinaten und überhaupt der rationalen Funktionen. Man sieht sogar aus seiner schönen in Descartes Briefsammlung eingerückten Auflösung der Aufgabe von der Brechung der Lichtstrahlen, daß er seine Methode auf die irrationalen Funktionen auszudehnen wußte, indem er sich durch Erhebung der Wurzelgrößen zu Potenzen von den Irrationalitäten losmachte. Fermat ist demnach als der wahre Erfinder der Differentialrechnung anzusehen. Durch Newton wurde nachher diese Rechnung in seiner Methode der Fluxionen mehr analytisch gebildet; er vereinfachte und verallgemeinerte die Verfahrungsarten derselben durch seinen schönen binomischen Lehrsatz. Dazu bereicherte Leibnitz fast um dieselbe Zeit die Differentialrechnung mit einer Bezeichnungsart, die dadurch, daß sie den Uebergang von dem Endlichen in das unendlich Kleine andeutet, mit dem Vortheile, die allgemeinen Resultate dieser Rechnung auszudrücken, den Vortheil verbindet, die ersten genäherten Werthe der Differenzen und Summen der Größen anzugeben; einer Bezeichnungsart, die sich der Rechnung mit partialen Differentialen von selbst angepaßt hat.

Zuweilen kommt man auf Ausdrücke, die so viele Glieder und Faktoren enthalten, daß numerische Substitutionen dabei unausführbar werden. Dieß findet bei den Wahr-

scheinlichkeitsaufgaben Statt, wenn man sehr viele Begebenheiten in Betracht zieht. Doch kommt es dann nur darauf an, den numerischen Werth der Formeln zu erhalten, um zu erfahren, mit welcher Wahrscheinlichkeit die durch Vervielfältigung der Begebenheiten entwickelten Resultate angezeigt sind, und vorzüglich darauf, das Gesetz zu finden, nach welchem sich diese Wahrscheinlichkeit unaufhörlich der Gewißheit nähert, die sie zuletzt erreichen würde, wenn sich die Begebenheiten bis zu einer unendlich großen Anzahl vermehrten. Um hierzu zu gelangen, bedachte ich, daß die bestimmten Integrale von Differentialen, die mit auf hohe Potenzen erhobenen Faktoren multiplizirt sind, durch die Integration aus sehr vielen Ausdrücken und Faktoren bestehende Formeln geben. Durch diese Bemerkung kam ich auf den Gedanken, in ähnliche Integrale die verwickelten Ausdrücke der Analysis und die Integrale der Gleichungen mit Differenzen zu verwandeln. Dieß habe ich durch eine Methode zu Stande gebracht, die zugleich die unter dem Integralzeichen begriffene Funktion und die Gränzen der Integration gibt. Sie bietet als etwas Merkwürdiges dar, daß diese Funktion die erzeugende Funktion der gegebenen Ausdrücke und Gleichungen selbst ist, wodurch sich diese Methode wieder an die Theorie der erzeugenden Funktionen anschließt, deren Ergänzung sie also ist. Jetzt war nur noch übrig, das bestimmte Integral in eine konvergirende Reihe zu verwandeln. Hierzu gebrauche ich ein von mir gefundenes Verfahren, durch welches die Reihe mit desto größerer Schnelligkeit konvergirt, je verwickelter die Formel ist, die sie darstellt; so daß das Verfahren um so genauer ist, je nöthiger es wird. Am häufigsten hat die Reihe zum Faktor die Quadratwurzel aus dem Verhältnisse des Kreisumfangs

zum Durchmesser; zuweilen hangt sie auch von andern transzendenten Größen ab, deren Anzahl unendlich groß ist.

Eine wichtige Bemerkung, die von der großen Allgemeinheit der Analysis abhangt, und welche erlaubt, jene Methode auch auf die bei der Wahrscheinlichkeitstheorie am häufigsten vorkommenden Formeln und Differenzgleichungen anzuwenden, besteht darin, daß die Reihen, auf die man kommt, wenn man die Gränzen der bestimmten Integrale als wirklich und positiv voraussetzt, ebenfalls in dem Falle gelten, in welchem die diese Gränzen bestimmende Gleichung nur negative oder eingebildete Wurzeln hat. Diese Uebergänge vom Positiven zum Negativen und vom Wirklichen zum Eingebildeten, von denen ich zuerst Gebrauch gemacht habe, führten mich auch noch zur Auffindung der Werthe mehrerer sonderbaren bestimmten Integrale, welche ich nachher direkt bewies. Es lassen sich also diese Uebergänge wie Entdeckungsmittel ansehen, ähnlich der Induktion und der Analogie, welcher beiden sich die Geometer seit langer Zeit bedient haben, anfänglich mit außerordentlicher Zurückhaltung, nachher aber, da eine große Anzahl Beispiele deren Gebrauch gerechtfertigt hatte, mit gänzlichem Zutrauen. Jedoch müssen die durch die verschiedenen Mittel erhaltenen Resultate jederzeit erst durch direkte Beweise bestätigt werden.

Den gesammten vorhergehenden Methoden habe ich den Namen der **Rechnung mit erzeugenden Funktionen** gegeben; diese Rechnung liegt meinem Werke, **analytische Theorie der Wahrscheinlichkeiten** (Théorie analytique des Probabilités) betitelt, zum Grunde. Sie schließt sich an **Descartes** einfachen Gedanken an, die wiederholten Multiplikationen einer Größe mit sich selbst oder ihre ganzen und positiven Potenzen dadurch zu

bezeichnen, daß man oben an den dieselbe ausdrückenden Buchstaben die Zahlen schreibt, welche die Grade dieser Potenzen andeuten. Diese Bezeichnungsart scheint vielleicht gleichgültig. Da aber die Sprache der Analysis, die vollkommenste von allen, durch sich selbst ein mächtiges Werkzeug zu Entdeckungen ist, so sind ihre Bezeichnungsarten, wenn sie nöthig und glücklich erfunden sind, lauter Keime zu neuen Rechnungen, wie sich an vorigem Beispiele zeigte.

Wallis, der in seinem Werke unter dem Titel: Arithmetik der unendlichen Größen (Arithmetica Infinitorum), welches zu denen gehört, die am meisten zu den Fortschritten der Analysis beigetragen haben, sich besonders vorgesetzt hat, dem Faden der Induktion und Analogie zu folgen, fiel darauf, daß, wenn der Exponent eines Buchstaben durch zwei, drei, und so weiter, dividirt wird, der der Quotient, nach Descartes Bezeichnungsart und wenn die Division möglich ist, der Exponent der Quadratwurzel, Kubikwurzel, und so fort, der Größe ist, welche der auf den dividirten Exponenten erhobene Buchstab bezeichnet. Indem er nun dieses Resultat, durch Analogie, auf den Fall ausdehnte, in welchem die Division unmöglich ist, betrachtete er eine Größe mit gebrochenen Exponenten wie die Wurzel, von dem durch den Nenner jenes Bruches bezeichneten Grade nämlich, aus der Größe, wenn sie auf die durch den Zähler ausgedrückte Potenz erhoben wird. Er bemerkte ferner, daß, nach Descartes Bezeichnungsart, die Multiplikation zweier Potenzen eins und desselben Buchstaben durch Addition ihrer Exponenten und ihre Division durch Subtraktion des Exponenten der dividirenden Potenz von dem Exponenten der zu dividirenden bewerkstelligt wird, wenn dieser größer ist, als jener. Wallis dehnte dieses

Resultat auf den Fall aus, in welchem der erste Exponent dem zweiten gleich ist oder ihn übertrifft, wodurch die Differenz Null oder negativ wird. Er folgerte daraus, daß ein negativer Exponent den Quotienten der Einheit durch die Größe mit demselben Exponenten, positiv genommen, bezeichnet. Diese Bemerkungen führten ihn auf die Integration der monomischen Differentiale überhaupt, woraus er die bestimmten Integrale einer besondern Art binomischer Differentiale herleitete, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist. Indem er hierauf das Gesetz der diese Integrale bezeichnenden Zahlen bemerkte, führte ihn eine Reihe von Interpolationen und glücklichen Folgerungen, in denen man den Keim der Rechnung mit bestimmten Integralen erblickt, welche die Geometer so sehr beschäftigt hat, und eine der Grundlagen meiner neuen Theorie der Wahrscheinlichkeiten ausmacht, auf das Verhältniß der Oberfläche des Kreises zu dem Quadrate seines Diameters, durch ein unendliches Produkt ausgedrückt, welches, wenn man es abbricht, dieses Verhältniß in immer engere und engere Gränzen einschließt; eins der sonderbarsten Resultate der Analysis. Dennoch ist es sonderbar, daß, obgleich Wallis die gebrochenen Exponenten der Wurzelpotenzen so schön betrachtet hatte, er dessen ungeachtet diese Potenzen noch immer, wie man vor ihm gethan hatte, zu bezeichnen fortfuhr.

Newton gebrauchte, wenn ich nicht irre, zuerst, in seinen Briefen an Oldenburg, die Bezeichnung solcher Potenzen durch gebrochene Exponenten.

Indem er vermittelst der Induktion, von welcher Wallis einen so schönen Gebrauch gemacht hatte, die Exponenten der Potenzen des Binoms mit den Koeffizien-

ten der Ausdrücke der Entwickelung desselben verglich, in dem Falle, in welchem dieser Exponent eine ganze positive Zahl ist, bestimmte er das Gesetz dieser Koeffizienten und dehnte es durch Analogie auf die gebrochenen und negativen Potenzen aus. Diese verschiedenen aus Descartes Bezeichnungsart hergeleiteten Resultate zeigen deren Einfluß auf die Fortschritte der Analysis. Sie gewährt auch noch den Vortheil, daß sie den einfachsten und richtigsten Begriff von den Logarithmen gibt, die eigentlich nur die Exponenten einer Größe sind, deren auf einander folgende Potenzen dadurch, daß sie durch unendlich kleine Stufen wachsen, alle Zahlen darstellen können.

Allein die wichtigste Ausdehnung hat diese Bezeichnungsart durch die veränderlichen Exponenten erhalten, wodurch die Exponentialrechnung entstanden ist, einer der fruchtbarsten Zweige der neuern Analysis. Leibnitz zeigte zuerst die transzendenten Größen mit veränderlichen Exponenten an und ergänzte dadurch das System der Elemente, aus welchen eine endliche Funktion bestehen kann; denn jede enwickelte endliche Funktion einer veränderlichen Größe reduzirt sich bei der letzten Analysirung auf einfache Größen, die durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division kombinirt und auf beständige oder veränderliche Potenzen erhoben sind. Die Wurzeln der aus diesen Elementen gebildeten Gleichungen sind implizirte Funktionen der veränderlichen Größe. So ist der Logarithme einer veränderlichen Größe eine implizirte Funktion derselben, da er der Exponent der ihr gleichen Potenz in der Reihe der Potenzen der Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithme die Einheit ist.

Leibnitz fiel darauf, seiner Differentialkarakteristik

dieselben Exponenten, wie den Größen, zu geben; dann bezeichnen aber diese Exponenten nicht die wiederholten Multiplikationen einer und derselben Größe, sondern die wiederholten Differentiationen einer und derselben Funktion. Diese neue Erweiterung von Descartes Bezeichnungsart führte Leibnitz auf die Analogie der positiven Potenzen mit den Differentialen und der negativen Potenzen mit den Integraleu. Lagrange verfolgte diese sonderbare Analogie in allen ihren Entwickelungen und gelangte durch eine Reihe von Induktionen, die als eine der schönsten von dieser Methode gemachten Anwendungen betrachtet werden kann, zu eben so merkwürdigen, als nützlichen allgemeinen Formeln über die gegenseitigen Verwandlungen der Differenzen und der Integrale in einander, wenn die veränderlichen Größen verschiedene endliche Zunahme erleiden, und auch, wenn diese Zunahmen unendlich klein sind. Er hat aber die Beweise derselben, die er für schwer hielt, nicht gegeben. Die Theorie der erzeugenden Funktionen dehnt Descartes Bezeichnungsart auf alle beliebige Karakteristiken aus; sie zeigt die Analogie der Potenzen und der durch diese Karakteristiken bezeichneten Operationen mit einleuchtender Gewißheit, so daß sie auch wie die Exponentialrechnung der Karakteristiken angesehen werden kann. Alles, was die Reihen und Integration der Gleichungen mit Differenzen betrifft, läßt sich äußerst leicht daraus herleiten.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von den Spielen.

Die bei den Spielen vorkommenden Kombinationen waren der Gegenstand der ersten Untersuchungen über

Wahrscheinlichkeiten. Unter diesen unendlich verschiedenen Kombinationen können mehrere mit Leichtigkeit berechnet werden; andere erfordern wieder schwierigere Rechnungen; und da die Schwierigkeiten wachsen, je nachdem die Kombinationen verwickelter werden, so war es vorzüglich der Wunsch, diese zu überwinden, zum Theil auch Neugier, welche die Geometer zu immer höherer Vervollkommnung dieses Theils der Analysis antrieben. Vorläufig haben wir gesehen, daß sich die Gewinnste einer Lotterie leicht durch die Theorie der Kombinationen bestimmen ließen. Aber es ist schon schwieriger, zu berechnen, wie viele Ziehungen geschehen müssen, damit man, zum Beispiel, Eins gegen Eins wetten könne, daß in diesen Ziehungen alle Nummern herauskommen werden. Wenn hier n die Anzahl aller Nummern, r die Anzahl der Nummern, welche bei jeder Ziehung herauskommen, und i die unbekannte Anzahl Ziehungen bedeutet, so hangt der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit des Herauskommens aller Nummern von der nten endlichen Differenz der Potenz i des Produkts von r auf einander folgenden Zahlen ab. Ist die Zahl n beträchtlich groß, so wird die Bestimmung des Werthes von i, welcher jener Wahrscheinlichkeit ½ hervorbringt, unmöglich, es sey dann, daß man diese Differenz in eine sehr konvergirende Reihe verwandeln könne. Dieß läßt sich aber durch die oben angezeigte Methode für die Approximationen der Funktionen von sehr großen Zahlen glücklich bewerkstelligen. Auf diese Weise findet sich, daß, wenn die Lotterie aus zehn tausend Nummern besteht, von denen bei jeder Ziehung nur Eine herauskommt, es nachtheilig ist, Eins gegen Eins zu wetten, daß alle Nummern in 95767 Ziehungen herauskommen werden, vortheilhaft hingegen, dieselbe Wette für 95768 Zie-

hungen anzustellen. Bei der französischen Lotterie ist diese Wette nachtheilig für 85, vortheilhaft für 86 Ziehungen.

Wir wollen uns ferner zwei Spieler A und B denken, die Münz und Flach mit einander spielen, so daß bei jedem Wurfe, wenn Münz fällt, B von A eine Marke erhält, A von B aber, wenn Flach fällt; die Anzahl Marken von B ist begränzt, die Anzahl Marken von A unbegränzt; und das Spiel soll nicht eher aufhören, bis B keine Marken mehr hat. Es fragt sich, wie groß die Anzahl der Würfe seyn müsse, um Eins gegen Eins wetten zu können, daß das Spiel in dieser Anzahl Würfe geendigt sey. Nun ist der Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, daß das Spiel in i Würfen aufhören werde, durch eine Reihe gegeben, die sehr viele Glieder und Faktoren enthält, wenn B eine beträchtliche Anzahl von Marken hat; also würde dann die Aufsuchung des Werthes der unbekannten Größe i, durch welchen diese Reihe gleich ½ wird, unmöglich seyn, wenn es nicht gelänge, die Reihe in eine sehr konvergirende umzuschaffen. Wendet man obige Methode auf dieselbe an, so findet sich ein sehr einfacher Ausdruck für die unbekannte Größe, aus welchem hervorgeht, daß, wenn B, zum Beispiel, hundert Marken hat, etwas weniger, als Eins gegen Eins zu wetten ist, daß das Spiel in 23780, und etwas mehr, als Eins gegen Eins, daß es in 23781 Würfen geendet seyn werde.

Diese beiden Beispiele, verbunden mit den schon oben gegebenen, zeigen hinlänglich, wie die bei Spielen vorkommenden Aufgaben zur Vervollkommnung der Analysis beitragen konnten.

Von den unbekannten Ungleichheiten, die unter den Zufällen Statt finden können, die man gleich setzt.

Die Ungleichheiten dieser Art haben auf die Resultate der Wahrscheinlichkeitsrechnung einen merklichen Einfluß, der eine besondere Aufmerksamkeit verdient. Gesetzt bei dem Spiele Münz und Flach sey es eben so leicht, die eine, als die andere Seite des Geldstücks obenhin zu bringen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß Münz im ersten Wurfe falle, ½ und die Wahrscheinlichkeit, daß es zweimal hinter einander falle, ¼. Ist aber in dem Geldstücke eine Ungleichheit vorhanden, welche bewirkt, daß eine Seite öfter obenhin kommt, als die andere, jedoch ohne daß man weiß, welches die durch diese Ungleichheit begünstigte Seite ist, so bleibt zwar die Wahrscheinlichkeit, daß Münz im ersten Wurfe falle, immer ½, da bei der Unwissenheit, in der man sich über die von der Ungleichheit begünstigte Seite befindet, die Wahrscheinlichkeit der einfachen Begebenheit um eben so viel vermehrt wird, wenn die Ungleichheit ihr günstig ist, als sie vermindert wird, wenn die Ungleichheit ihr zuwider ist. Aber bei dieser Unwissenheit vermehrt sich die Wahrscheinlichkeit, Münz zweimal hinter einander zu werfen. Denn diese Wahrscheinlichkeit ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit, Münz im ersten Wurfe zu werfen, in die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn es im ersten Wurfe gefallen ist, es auch im zweiten fallen werde; fällt es nun wirklich im ersten Wurfe, so gibt dieß Grund, zu glauben, daß die Ungleichheit des Geldstücks diese Seite begünstige; also vermehrt dann die unbekannte Ungleichheit die Wahrscheinlichkeit, daß Münz im zweiten Wurfe falle; sie ver-

mehrt folglich das Produkt beider Wahrscheinlichkeiten. Um dieß zu berechnen, wollen wir annehmen, die Ungleichheit vermehre die Wahrscheinlichkeit der von ihr begünstigten einfachen Begebenheit um ein Zwanzigstel. Ist diese Begebenheit Münz, so wird um dessen Wahrscheinlichkeit ½ plus $1/20$, oder $11/20$, und die Wahrscheinlichkeit, es zweimal hinter einander zu werfen, wird das Quadrat von $11/20$, oder $121/400$ seyn.

Wird hingegen die Flachseite von der Ungleichheit begünstigt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß Münz falle, ½ minus $1/20$, oder $9/20$, und also die Wahrscheinlichkeit, daß es zweimal hinter einander falle, $81/400$. Da nun vor dem Versuche kein Grund vorhanden ist, zu glauben, die Ungleichheit werde eine dieser Erscheinungen mehr begünstigen, als die andere, so erhellt deutlich, daß, um die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Begebenheit Münz Münz zu finden, die Hälfte der Summe beider enthaltenen Wahrscheinlichkeiten genommen werden muß, wodurch sich $101/400$ als diese Wahrscheinlichkeit ergibt, welche ¼ um $1/400$ übertrifft, das heißt, um das Quadrat des Zuwachses $1/20$, um welchen die Ungleichheit die Wahrscheinlichkeit der von ihr begünstigten Erscheinung vermehrt. Die Wahrscheinlichkeit, Flach Flach zu werfen, ist ebenfalls $101/400$; aber die Wahrscheinlichkeiten, Münz Flach oder Flach Münz zu werfen, sind jede nur $99/400$; denn die Summe dieser vier Wahrscheinlichkeiten muß der Gewißheit oder Einheit gleich seyn. So findet sich überhaupt, daß die beständigen und unbekannten Ursachen, welche die einfachen, für gleich möglich gehaltenen Begebenheiten begünstigen, immer die Wahrscheinlichkeit der Wiederholung einer und derselben einfachen Begebenheit vermehren.

Während einer geraden Anzahl von Würfen müssen Münz und Flach beide entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl Male fallen. Die Wahrscheinlichkeit jedes dieser Fälle ist ½, wenn die Möglichkeiten des Fallens beider Seiten einander gleich sind; findet aber unter diesen eine unbekannte Ungleichheit Statt, so ist eine solche Ungleichheit jedesmal dem erstern Falle günstig.

Zwei Spieler, deren Geschicklichkeiten gleich gesetzt werden, spielen unter der Bedingung mit einander, daß nach jedem einzelnen Spiele derjenige, welcher verloren hat, seinem Gegner eine Marke gibt, und daß das Ganze so lange währt, bis einer der Spieler keine Marken mehr hat. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt uns, daß, um Gleichheit des Spieles hervorzubringen, der Einsatz der Spieler im umgekehrten Verhältnisse ihrer Marken stehen muß. Findet sich aber unter ihren Geschicklichkeiten eine kleine unbekannte Ungleichheit, so begünstigt diese denjenigen Spieler, der die kleinere Anzahl Marken hat. Seine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, vermehrt sich, wenn die Spieler übereinkommen, ihre Marken zu verdoppeln, zu verdreifachen; und sie würde ½ oder der Wahrscheinlichkeit des andern Spielers gleich werden, wenn, bei immer gleichem Verhältnisse, die Anzahl der Marken beider unendlich groß würde.

Der Einfluß solcher unbekannten Ungleichheiten läßt sich dadurch verbessern, daß man sie selbst den Wirkungen des Zufalls unterwirft. Wenn man zum Beispiel, in dem Spiele Münz und Flach, jedesmal mit dem ersten Geldstück noch ein zweites in die Höhe wirft und die obenhin fallende Seite des zweiten Geldstücks beständig Münz nennt, so nähert sich die Wahrscheinlichkeit, Münz zweimal hinter einander mit dem ersten Stücke zu werfen, viel mehr ei-

nem Viertel, als in dem Falle eines einzigen Stücks. In diesem letztern Falle ist der Unterschied dem Quadrate des kleinen Zuwachses von Wahrscheinlichkeit gleich, mit welchem die unbekannte Ungleichheit die von ihr begünstigte Seite des erstern Stücks vermehrt: in dem andern Falle ist dieser Unterschied das vierfache Produkt aus jenem Quadrate in das sich auf das zweite Stück beziehende entsprechende Quadrat.

Wirft man in eine Urne hundert Nummern, von Eins bis hundert, in der natürlichen Ordnung der Zahlen, und zieht dann, nachdem man die Urne geschüttelt hat, um die Nummern zu mischen, eine heraus, so ist klar, daß, wenn sie sich gut gemischt haben, die Wahrscheinlichkeiten des Herauskommens der Nummern einander gleich sind. Wenn man aber befürchtet, es möchten unter ihnen kleine Verschiedenheiten Statt finden, die von der Ordnung abhängen, nach welcher die Nummern in die Urne geworfen worden sind, so kann man diese Verschiedenheiten dadurch beträchtlich vermindern, daß man dieselben Nummern nach der Ordnung ihres Herauskommens aus der ersten Urne in eine zweite wirft und dann wieder diese zweite Urne schüttelt, um die Nummern zu mischen. Eine dritte, vierte Urne, und so weiter, würde jene schon bei der zweiten Urne unmerklichen Verschiedenheiten noch mehr vermindern.

Von den aus unbestimmter Vervielfältigung der Begebenheiten entspringenden Gesetzen der Wahrscheinlichkeit.

Mitten unter den veränderlichen und unbekannten Ursachen, die man unter dem Namen Zufall begreift, und durch welche der Gang der Begebenheiten ungewiß und un-

regelmäßig wird, sieht man, je mehr sie sich vervielfältigen, eine auffallende Regelmäßigkeit entstehen, die von einem Plane abzuhangen scheint, daher man sie als einen Beweis der, die Welt regierende, Vorsehung angesehen hat. Denkt man aber weiter darüber nach, so ergibt sich bald, daß diese Regelmäßigkeit nur die Entwickelung der gegenseitigen Möglichkeiten der einfachen Erscheinungen ist, die sich um so häufiger darstellen müssen, je wahrscheinlicher sie sind. Wir wollen uns, zum Beispiel eine Urne vorstellen, die weiße und schwarze Kugeln enthält, und dabei voraussetzen, daß jedesmal, wenn man eine Kugel herausgezogen hat, sie wieder hineingelegt wird, um noch einmal eine herauszuziehen. Hier wird nun das Verhältniß der Anzahl der herausgezogenen weißen Kugeln zu der Anzahl der herausgezogenen schwarzen Kugeln bei den ersten Ziehungen meistens sehr unregelmäßig seyn; aber die veränderlichen Ursachen dieser Unregelmäßigkeit bringen Wirkungen hervor, die dem regelmäßigen Gange der Erscheinungen abwechselnd günstig und zuwider sind und welche, indem sie sich bei der Anhäufung sehr vieler Ziehungen gegenseitig zerstören, das Verhältniß der in der Urne enthaltenen weißen Kugeln zu den schwarzen immer mehr und mehr blicken lassen, welches Verhältniß die gegenseitigen Möglichkeiten gibt, daß bei jeder Ziehung eine weiße oder eine schwarze Kugel herauskommen werde. Daraus erhellt folgender Lehrsatz.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältniß der Anzahl herausgezogener weißer Kugeln zu der Gesammtanzahl der herausgekommenen Kugeln sich nicht über einen gegebenen Zwischenraum von dem Verhältnisse der Anzahl der weißen Kugeln zu der Anzahl sämmtlicher in der Urne enthaltenen Kugeln entferne, nähert sich durch unbestimmte

Vervielfältigung der Erscheinungen unbestimmt der Gewißheit, wie klein man auch jenen Zwischenraum annimmt.

Es war schwer, diesen von dem gesunden Verstande angegebenen Lehrsatz durch die Analysis zu beweisen. Auch hielt der berühmte Geometer Jakob Bernoulli, der sich zuerst mit derselben beschäftigte, seinen dazu gegebenen Beweis für sehr wichtig. Die Anwendung der Rechnung mit erzeugenden Funktionen auf diesen Gegenstand beweißt den Lehrsatz nicht nur mit Leichtigkeit, sondern gibt überdies noch die Wahrscheinlichkeit an, daß sich das Verhältniß der beobachteten Erscheinungen nur zwischen gewissen Gränzen von dem wahren Verhältnisse ihrer gegenseitigen Möglichkeiten entferne.

Aus dem vorhergehenden Lehrsatze läßt sich die Folgerung ziehen, die als ein allgemeines Gesetz angesehen werden muß, daß die Verhältnisse der Wirkungen der Natur fast ganz beständig sind, wenn diese Wirkungen in großer Anzahl betrachtet werden. So ist, ungeachtet der Verschiedenheit der Jahre, die Summe des Ertrags während einer beträchtlichen Anzahl derselben, wie oft bemerkt worden ist, ungefähr die nämliche; daher kann man sich, durch eine nützliche Vorsicht, vor der Unregelmäßigkeit der Jahrszeiten sicher stellen, indem man die von der Natur ungleich gegebenen Güter auf alle Zeiten gleich vertheilt. Auch sind von obigem Gesetze die Wirkungen moralischer Ursachen nicht ausgenommen.

Das Verhältniß der jährlichen Geburten zu der Bevölkerung und das Verhältniß der Ehen zu den Geburten erleiden nur sehr geringe Veränderungen; in Paris ist die Anzahl der jährlichen Geburten fast immer dieselbe gewesen; so soll sich auch, auf der Post zu Paris, zu gewöhnlichen

Seiten, die Anzahl der wegen fehlerhaften Aufschriften zurückgelegte Briefe jährlich wenig ändern; was man ebenfalls in London bemerkt hat.

Ferner folgt aus diesem Lehrsatze, daß in einer unbestimmt fortgesetzten Reihe von Begebenheiten die Wirkung der regelmäßigen und beständigen Ursachen auf die Dauer über die Wirkung der unregelmäßigen Ursachen die Oberhand gewinnen muß. Dadurch wird der Ertrag der Lotterien für den Staat eben so sicher, wie der Ertrag des Ackerbaus, indem die Zufälle, welche sie sich vorbehalten, ihnen bei der großen Einsatzsumme jedesmal Vortheil zusichern. Eben so geschieht es, daß, da zahlreiche günstige Zufälle mit der Befolgung der ewigen Gesetze der Vernunft, Gerechtigkeit und Menschlichkeit, welche Staaten gründen und aufrecht erhalten, beständig verbunden sind, großer Vortheil daraus entspringt, wenn man sich nach diesen Gesetzen richtet, großer Nachtheil hingegen für den, der sich von ihnen entfernt. Man befrage die Geschichte und seine eigene Erfahrung; es wird sich zeigen, daß alle Thatsachen diesem Resultate der Rechnung beistimmen. Man betrachte die Vortheile, welche die Treue der Regierungen verschafft hat, die sie zur Grundlage ihres Betragens machten, und wie sehr dieselben für die Opfer entschädigt worden sind, die ihnen eine gewissenhafte Genauigkeit im Worthalten dann und wann kostete: welchen unermeßlichen Kredit im Innern, welches Uebergewicht von außen! Dagegen sehe man, in welchen Abgrund von Unglücksfällen die Völker oft durch Ehrgeiz und Treulosigkeit ihrer Oberhäupter gestürzt wurden. Allemal, wenn eine von Eroberungssucht ergriffene große Macht nach allgemeiner Herrschaft strebt, bringt der

Wunsch nach Unabhängigkeit unter den mit Unrecht angegriffenen Nationen eine Verbindung hervor, deren Opfer jene fast immer wird. Eben so werden, mitten unter den veränderlichen Ursachen, welche die verschiedenen Staaten erweitern oder beschränken, die natürlichen Gränzen, als beständige Ursachen wirkend, zuletzt den Vorrang behaupten. Daher sollten Reiche, die ihre Selbstständigkeit, wie ihr Glück erhalten wollen, sich niemals über diese Gränzen ausdehnen, in welche sie doch unaufhörlich durch die Wirkung dieser Ursachen zurückgeführt werden, wie die Wasser der Meere, von heftigen Stürmen erhoben, durch die Schwere wieder in ihre Behälter zurückfallen. Auch dieß ist ein Resultat der Wahrscheinlichkeitsrechnung und hat sich durch unzählige traurige Erfahrungen bestätigt. Behandelte man die Geschichte unter dem Gesichtspunkte des Einflusses der beständigen Ursachen, so würde sie nicht nur das Interesse der Neugierde befriedigen, sondern zugleich auch den Menschen die nützlichsten Lehren darbieten. Zuweilen werden die unvermeidlichen Wirkungen dieser Ursachen zufälligen Umständen zugeschrieben, die ihre Wirkung nur entwickelt haben. So ist es, zum Beispiel, gegen die Natur der Dinge, daß ein Volk immer von einem andern beherrscht werde, wenn beide durch ein großes Meer oder sonst eine große Entfernung getrennt sind. Nun läßt sich behaupten, daß auf die Dauer diese beständige Ursache, indem sie sich unaufhörlich mit den in demselben Sinne wirkenden und durch die Folge der Zeiten herbeigeführten veränderlichen Ursachen verbindet, deren zuletzt hinreichend starke finden wird, um dem unterjochten Volke seine natürliche Unabhängigkeit wiederzugeben oder es mit einem benachbarten mächtigen Staate zu vereinigen.

In sehr vielen Fällen, und dieß sind gerade die wichtigsten der Analysis des Zufalls, sind die Wahrscheinlichkeiten der einfachen Begebenheiten unbekannt, und dann müssen wir in den vergangenen Begebenheiten Merkmale suchen, die uns in unsern Vermuthungen über die Ursachen, von welchen sie abhangen, leiten können. Wendet man die Analysis der erzeugenden Funktionen auf den oben dargestellten Grundsatz über die aus den beobachteten Erscheinungen gefolgerte Wahrscheinlichkeit ihrer Ursachen an, so gelangt man zu folgendem Lehrsatze:

Wenn eine einfache Begebenheit oder eine aus mehreren einfachen Erscheinungen zusammengesetzte Begebenheit, wie eine Spielpartbie, sehr oft wiederholt worden ist, so sind die Wahrscheinlichkeiten der einfachen Erscheinungen, welche das Beobachtete am wahrscheinlichsten machen, diejenigen, welche die Beobachtung mit der größten Wahrscheinlichkeit anzeigt: je öfter die beobachtete Begebenheit wiederholt wird, desto mehr nimmt diese Wahrscheinlichkeit zu, und sie würde zuletzt zur Gewißheit werden, wenn die Anzahl der Wiederholungen unendlich groß würde.

Hier sind zwei Arten von Näherungen: die eine beziehet sich auf die von beiden Seiten genommenen Gränzen der Möglichkeiten, welche dem Vergangenen die meiste Wahrscheinlichkeit geben: die andere Näherung beziehet sich auf die Wahrscheinlichkeit, daß diese Möglichkeiten zwischen diese Gränzen fallen. Die Wiederholung der zusammengesetzten Begebenheit vermehrt diese Wahrscheinlichkeit immer mehr und mehr, wenn die Gränzen dieselben bleiben, sie verengt den Zwischenraum dieser Gränzen immer mehr und mehr, wenn die Wahrscheinlichkeit dieselbe bleibt; bei unendlich

fortgesetzter Wiederholung wird der Zwischenraum Null, und die Wahrscheinlichkeit verwandelt sich in Gewißheit.

Wird dieser Lehrsatz auf das in den verschiedenen Theilen Europas bemerkte Verhältniß der Geburten der Knaben zu den Geburten der Mädchen angewendet, so findet sich, daß dieses Verhältniß, welches überall dem Verhältnisse von 22 zu 21 ungefähr gleich ist, mit äußerst hoher Wahrscheinlichkeit eine größere Leichtigkeit in den Geburten der Knaben anzeigt; bedenkt man ferner, daß in Neapel dasselbe Verhältniß Statt findet, wie in Petersburg, so zeigt sich deutlich, daß der Einfluß des Klimas hierbei unmerkbar ist. Es ließ sich also gegen die gewöhnliche Meinung vermuthen, daß diese größere Anzahl der männlichen Geburten auch im Oriente bestehe. Ich hatte deshalb die nach Aegypten geschickten französischen Gelehrten eingeladen, sich mit dieser interessanten Untersuchung zu beschäftigen; aber die Schwierigkeit, genaue Nachweisungen über die Geburten zu erhalten, ließ sie ihren Zweck nicht erreichen. Glücklicher Weise hat von Humboldt diesen Gegenstand unter den unermeßlich vielen neuen nicht vernachläßigt, die von ihm in Amerika mit soviel Scharfsinn, Standhaftigkeit und Muth beobachtet und gesammelt worden sind. Er fand zwischen den Wendekreisen dasselbe Verhältniß der Geburten der Knaben zu den Geburten der Mädchen wieder, welches in Paris Statt findet: darnach ist also die größere Anzahl männlicher Geburten als ein allgemeines Gesetz des Menschengeschlechts anzusehen. Die Gesetze, welche in dieser Hinsicht die verschiedenen Thierarten befolgen, scheinen mir die Aufmerksamkeit der Naturforscher zu verdienen.

Da das Verhältniß der Geburten der Knaben zu den Geburten der Mädchen sehr wenig von der [illegible]heit verschie-

den ist, so könnten selbst ziemlich große Anzahlen an einem Orte beobachteter Geburten hierin ein dem allgemeinen Gesetze zuwiderlaufendes Resultat liefern, ohne daß man darum berechtigt wäre, hieraus zu schließen, dieses Gesetz sey da nicht vorhanden. Um einen solchen Schluß zu machen, muß man sehr große Anzahlen gebrauchen und sich versichern, daß eine solche Folgerung hohe Wahrscheinlichkeit hat. Büffon führt, zum Beispiel, in seiner politischen Arithmetik mehrere Gemeinen in Burgund an, in welchen die Anzahl der gebornen Knaben von der Anzahl geborner Mädchen übertroffen wurde. Unter diesen hatte die Gemeine Carcelle-le-Grignon bei 2009 Geburten während fünf Jahren 1026 Mädchen und 983 Knaben. Obgleich diese Zahlen beträchtlich sind, so zeigen sie dennoch eine größere Möglichkeit in den Geburten der Mädchen nur mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ an, welche kleiner ist, als die Wahrscheinlichkeit, in dem Spiele Münz und Flach die Münzseite nicht viermal hinter einander zu werfen, und nicht hinreicht, um die Ursachen dieser Anomalie aufzusuchen, die aller Wahrscheinlichkeit verschwinden würde, wenn man die Geburten in dieser Gemeine während eines ganzen Jahrhunderts verfolgte.

Die Geburtsregister, welche mit Sorgfalt geführt werden, um den Staat seiner Bürger zu versichern, können zur Bestimmung der Bevölkerung eines großen Reiches dienen, ohne daß man nöthig hat, zu der Zählung der Bewohner, einem eben so mühsamen, als schwierigen Geschäfte, wenn es mit Genauigkeit ausgeführt werden soll, seine Zuflucht zu nehmen. Dann muß aber das Verhältniß der Bevölkerung zu den jährlichen Geburten bekannt seyn. Das genaueste Mittel, dieses zu erhalten, besteht darin, erstens

solche Abtheilungen des Reiches dazu auszuwählen, die auf eine fast gleiche Weise über der ganzen Oberfläche desselben vertheilt sind, um dadurch das allgemeine Resultat von Lokalumständen unabhängig zu erhalten; zweitens für einen gebenen Zeitpunkt die Bewohner mehrerer Gemeinen in jeder dieser Abtheilungen sorgfältig zu zählen; drittens, durch die Geburtsliste während mehreren dem gegebenen Zeitpunkte vorhergehenden und nachfolgenden Jahre die entsprechende mittlere Anzahl der jährlichen Geburten zu bestimmen. Wird diese Anzahl durch die Zahl der Einwohner dividirt, so ergibt sich das Verhältniß der jährlichen Geburten zu der Bevölkerung, und zwar um so sicherer, je beträchtlicher jene Zahlungsangaben sind. Die französische Regierung, welche von dem Nutzen solcher Zählung überzeugt war, verordnete auf meine Bitte deren Ausführung. In dreißig über ganz Frankreich gleich vertheilten Departementern wurden die Gemeinen ausgesucht, welche die genauesten Nachweisungen liefern konnten. Ihre Zählungen gaben 2037615 Individuen als Gesammtsumme ihrer Bewohner am 23. September 1802. Die Geburtsliste dieser Gemeinen in den Jahren 1800, 1801 und 1802 gab:

Geborne:	Verehelicht:	Gestorbene:
110312 Knaben.	46037.	103659 Männer.
105287 Mädchen.		99443 Weiber.

Das Verhältniß der Bevölkerung zu den jährlichen Geburten ist also $28\frac{352845}{1000000}$; es ist größer, als man bisher geschätzt hatte. Multiplizirt man mit diesem Verhältnisse die Anzahl der jährlichen Geburten in Frankreich, so erhält man dessen Bevölkerung.

Hier bietet sich die Aufgabe dar, die Wahrscheinlichkeit

zu bestimmen, daß die so gefundene Bevölkerung von der wahren nicht über eine gegebene Gränze entfernt sey. Indem ich diese Aufgabe auflöste und auf ihre Auflösung die vorhergehenden Data anwendete, fand ich, daß, wenn man die Anzahl der jährlichen Geburten in Frankreich zu einer Million annimmt, wodurch man eine Bevölkerung von 28352845 Bewohner erhält, fast drei hundert tausend gegen Eins zu wetten ist, daß der Irthum in diesem Resultate noch nicht eine halbe Million betrage.

Das Verhältniß der Geburten der Knaben zu den Geburten der Mädchen, welches obige Liste angibt, ist 22 zu 21; und die Ehen verhalten sich zu den Geburten, wie drei zu vierzehn.

In Paris entfernen sich die Taufen der Kinder beider Geschlechter etwas von dem Verhältnisse 22 zu 21. Seit 1745, zu welchem Zeitpunkte man anfing, die Geschlechter in den Geburtsregistern zu unterscheiden, bis zu Ende 1784 wurden in dieser Hauptstadt 393386 Knaben und 377555 Mädchen getauft. Das Verhältniß dieser beiden Zahlen ist ungefähr 25 zu 24; es scheint also, daß sich zu Paris durch eine besondere Ursache die Taufen beider Geschlechter mehr der Gleichheit nähern. Wendet man die Wahrscheinlichkeitsrechnung hierauf an, so findet sich, daß für das Daseyn dieser Ursache 238 gegen Eins zu wetten ist, und dieß reicht hin, um deren Aufsuchung zu rechtfertigen. Indem ich darüber nachdachte, schien mir der bemerkte Unterschied davon abzuhangen, daß die Eltern vom Lande und aus den Provinzen, welche einigen Vortheil dabei finden, die Knaben bei sich zu behalten, weniger Knaben im Verhältnisse gegen die Mädchen in das Pariser Findelhaus geschickt hatten, als das Verhältniß der Geburten beider Geschlechter

beträgt. Dieß beweisen mir die Register des Findelhauses. Seit dem Anfange des Jahres 1745 bis Ende 1809 sind 163499 Knaben und 159405 Mädchen hineingebracht worden. Die erstere dieser Zahlen übertrifft die zweite nur um ein Achtunddreißigstel, welche sie doch wenigstens um ein Vierundzwanzigstel übertreffen sollte. Hierdurch wird das Daseyn der genannten Ursache bestätigt; so daß also, wenn auf die Findelkinder keine Rücksicht genommen wird, das Verhältniß der Geburten der Knaben zu den Geburten der Mädchen in Paris, wie im übrigen Frankreich, 22 zu 21 ist.

Die beständige Mehrzahl der Geburten der Knaben gegen die Geburten der Mädchen, in Paris und London, so lange man darauf geachtet hat, schien einigen Gelehrten ein Beweis der Vorsehung zu seyn, ohne welche, ihrer Meinung zufolge, durch die den Gang der Erscheinungen unaufhörlich störenden unregelmäßigen Ursachen die Anzahl der jährlich gebornen Mädchen mehrmals hätte größer seyn müssen, als die Anzahl der Knaben. (*)

---

*) Dieses ist die zweite Stelle, wo Laplace die Meinung von dem Einflusse der Vorsehung durch mathematische Betrachtungen zu berichtigen glaubt. Irren wir nicht, so ist die eine Meinung mehrerer Gelehrten diese: das männliche Geschlecht ist Veranlassungen zu einem früheren Tode mehr ausgesetzt als das weibliche. Dieses ist für sich klar genug, ohne eines Beweises zu bedürfen, und ohne daß es nöthig wäre, dergleichen Veranlassungen zu nennen. Es war also ein Ueberschuß männlicher Geburten über die weiblichen nöthig, um das Gleichgewicht zu erhalten. Indem wir nun dieser Stöhrung des Gleichgewichts jenes Verhältniß der

Dieser Beweis ist aber wieder ein neues Beispiel des Mißbrauchs, welcher schon so oft von den Finalursachen gemacht worden ist, die bei gründlicher Prüfung solcher Fragen jedesmal verschwinden, wenn man die nöthigen Data zu ihrer Beantwortung hat. Die Beständigkeit, von der hier geredet wird, ist eine Folge der regelmäßigen Ursachen, durch welche die Geburten der Knaben zahlreicher werden, und welche über die vom Zufall abhangenden Anomalien die Oberhand gewinnen, wenn die Anzahl der jährlichen Geburten beträchtlich ist. Die Aufsuchung der Wahrscheinlichkeit, daß während eines langen Zeitraums diese Beständigkeit fortdauern werde, gehört zu dem Zweige der Analysis des Zufalls, welcher von den begangenen Begebenheiten auf die Wahrscheinlichkeit der zukünftigen schließen lehrt; hierdurch findet sich, daß, wenn man von den seit 1745 bis 1784 beobachteten Geburten ausgeht, beinahe vier gegen Eins zu wetten ist, daß in Paris die jährlichen Geburten der Knaben während eines Jahrhunderts die Geburten der Mädchen beständig übertreffen werden; es ist also nicht zu verwundern, daß dieß während eines halben Jahrhunderts Statt gefunden hat.

---

männlichen und weiblichen Geburten so weislich entgegengestellt sehen, werden wir sehr natürlich auf das Daseyn einer die Welt regierenden Vorsehung geleitet. Aber sagt Laplace, dieser Erfolg ergibt sich ja von selbst daraus, daß die Geburten der Knaben leichter von statten gehen, als die der Mädchen. Liegt dann in einer größeren Anzahl von Gefahren, denen das männliche Geschlecht ausgesetzt ist, ein physischer Grund von der leichteren Geburt der Knaben?

L.

Wir wollen noch ein Beispiel von der Entwicklung der beständigen Verhältnisse geben, welche die Begebenheiten durch immer wiederholte Vervielfältigung darbieten. Man stelle sich eine Reihe kreisförmig geordneter Urnen vor, von denen jede eine sehr große Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält, aber so, daß die Verhältnisse der weißen zu den schwarzen Kugeln der Urnen im Anfange sehr verschieden seyn mögen und eine, zum Beispiel, nur weiße, eine andere nur schwarze Kugeln enthalten kann. Nimmt man nun aus der ersten Urne eine Kugel, um sie in die zweite Urne zu legen, schüttelt die zweite Urne, um die hineingelegte Kugel mit den schon darin liegenden wohl zu vermischen, zieht auch aus dieser eine Kugel, um sie in die dritte Urne zu legen, fährt so fort bis zu der letzten Urne, aus welcher man eine Kugel zieht, um sie in die erste Urne zu legen, und fängt dann diese Reihe Ziehungen eine unbestimmte Anzahl von Malen wieder von vorne an, so zeigt die Analysis der Wahrscheinlichkeiten, daß die Verhältnisse der weißen zu den schwarzen Kugeln in den einzelnen Urnen zuletzt sowol unter einander, als auch dem Verhältnisse der Summe aller in allen Urnen enthaltenen weißen Kugeln zu der Summe aller in denselben enthaltenen schwarzen Kugeln gleich seyn werden. Durch eine solche regelmäßige Veränderungsweise verschwindet also auf die Dauer die ursprüngliche Unregelmäßigkeit dieser Verhältnisse, um der einfachsten Ordnung Platz zu machen. Setzt man jetzt noch zwischen die Urnen neue hinein, in welchen das Verhältniß der Summe der darin enthaltenen weißen Kugeln zu der Summe der schwarzen Kugeln von dem vorhergehenden verschieden ist, und setzt nun wieder mit sämmtlichen Urnen die Ausziehungen von Kugeln auf die angeführte Weise unbestimmt fort, so wird

die in den frühern Urnen hervorgebrachte einfache Ordnung anfänglich gestört, und die Verhältnisse der weißen zu den schwarzen Kugeln werden unregelmäßig; nach und nach aber wird diese Unregelmäßigkeit verschwinden, um einer neuen Ordnung zu weichen, da zuletzt wieder Gleichheit der Verhältnisse der in den Urnen enthaltenen weißen Kugeln zu den schwarzen eintreten wird. Diese Resultate lassen sich auf alle Kombinationen der Natur ausdehnen, in welchen die ihre Elemente belebenden beständigen Kräfte regelmäßige Arten von Thätigkeit bewirken, die selbst aus dem Schooße des Chaos bewundernswürdigen Gesetzen folgende Systeme hervorgehn zu lassen vermögen.

Die Erscheinungen, welche vom Zufalle am meisten abzuhangen scheinen, zeigen also, wenn sie sich vervielfältigen, ein Bestreben, sich feststehenden Verhältnissen unaufhörlich zu nähern, so, daß, wenn man sich bei jedem dieser Verhältnisse von beiden Seiten einen Zwischenraum denkt, der so klein ist, wie man will, die Wahrscheinlichkeit, daß das mittlere Resultat der Beobachtungen in diesen Zwischenraum falle, zuletzt von der Gewißheit nur um eine Größe verschieden seyn wird, welche kleiner ist, als jede Größe, die sich angeben läßt. Auf diese Weise kann man durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine große Anzahl von Beobachtungen das Daseyn solcher Verhältnisse erkennen. Ehe man aber die Ursachen derselben aufsucht, muß man, um sich nicht in vergebliche Grübeleien zu verirren, sich versichern, daß sie mit einer Wahrscheinlichkeit angezeigt sind, die nicht erlaubt, sie als vom Zufalle herrührende Anomalien zu betrachten. Die Theorie der erzeugenden Funktionen gibt einen sehr einfachen Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit, den man erhält, wenn man das Produkt aus dem

Differentiale der Größe, deren aus sehr vielen Beobachtungen hergeleitetes Resultat von der Wahrheit abweicht, in eine beständige Größe integrirt, welche beständige Größe kleiner ist, als die Einheit, von der Natur der Aufgabe abhangt und in einer Potenz steht, deren Exponent das Verhältniß des Quadrates jener Abweichung zu der Anzahl der Beobachtungen ist. Das zwischen gegebenen Gränzen genommene Integral wird, wenn es durch dasselbe ins Unendliche positiv und negativ ausgedehnte Integral dividirt wird, die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, daß die Abweichung von der Wahrheit zwischen diesen Gränzen enthalten sey. Dieß ist das allgemeine Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der durch eine große Anzahl von Beobachtungen angezeigten Resultate.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Philosophie der Natur.

Die Naturerscheinungen sind meistens von so vielen fremden Umständen umhüllt, und es äußern so viele störende Ursachen ihren Einfluß auf dieselben, daß ihre Erkenntniß sehr schwierig ist. Man kann nur durch Vervielfältigung der Beobachtungen oder Erfahrungen dazu gelangen, damit, wenn die fremden Wirkungen einander hierdurch gegenseitig zerstören, aus den mittlern Resultaten die Erscheinungen und ihre verschiedenen Elemente mit Evidenz hervorgehen. Je zahlreicher die Beobachtungen sind und je weniger sie von einander abweichen, desto mehr nähern sich ihre Resultate der Wahrheit. Die letztere Bedingung erfüllt man durch die Wahl der Methoden, durch die Genauigkeit der Beobachtungswerkzeuge und durch die darauf gewendete Sorgfalt, gut zu beobachten; darauf bestimmt man durch die Theorie der Wahrscheinlichkeiten die vortheilhaftesten oder dem Irrthum

am wenigsten unterworfenen mittlern Resultate. Aber dieß ist nicht hinreichend; man muß auch die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß die Irrthümer dieser Resultate in gegebenen Gränzen enthalten seyen, ohne welches man nur eine unvollkommene Kenntniß von dem erhaltenen Grade von Genauigkeit hat. Hierzu geeignete Formeln sind also eine wahre Vervollkommnung der Methode der Wissenschaften, und es ist sehr wichtig, sie zu dieser Methode hinzuzufügen. Die Analysis, welche sie erfordern, ist die feinste und schwierigste in der Theorie der Wahrscheinlichkeiten, daher ich sie auch vorzüglich in meinem Werke über diese Theorie berücksichtigt habe, in welchem ich zu Formeln dieser Art gelangt bin, die den merkwürdigen Vortheil haben, von dem Wahrscheinlichkeitsgesetze der Irrthümer unabhängig zu seyn, und nur durch die Beobachtungen selbst und durch ihre Ausdrücke gegebene Größen zu enthalten.

Jede Beobachtung hat zum analytischen Ausdrucke eine Funktion der Elemente, welche man bestimmen will; und wenn diese Elemente ungefähr bekannt sind, so wird diese Funktion eine lineärische Funktion ihrer Verbesserungen. Indem man sie der Beobachtung selbst gleich setzt, bildet man eine sogenannte Bedingungsgleichung. Wenn man nun eine große Anzahl solcher Gleichungen hat, so kombinirt man sie so, daß man eben so viele Finalgleichungen erhält, als Elemente da sind, deren Verbesserungen man dadurch bestimmt, daß man jene Gleichungen auflöst. Allein die vortheilhafteste Weise, die Bedingungsgleichungen zu kombiniren, um die Finalgleichungen zu erhalten, und das Gesetz der Irrthümer, denen die daraus hergeleiteten Elemente noch unterworfen seyn können, lehrt die Theorie der Wahrscheinlichkeiten. Die Bildung einer Finalgleichung

vermittelst der Bedingungsgleichungen geschieht dadurch, daß man jede der letztern mit einem unbestimmten Faktor multiplizirt und diese Produkte zu einander addirt; man muß daher ein solches System von Faktoren wählen, welches den kleinsten Irrthum befürchten läßt. Nun sieht man, daß, wenn man die möglichen Irrthümer eines Elements mit ihren gegenseitigen Wahrscheinlichkeiten multiplizirt, das vortheilhafteste System dasjenige seyn wird, in welchem die Summe dieser Produkte, alle positiv genommen, ein Minimum ist: denn ein positiver oder negativer Irrthum muß wie ein Verlust angesehen werden. Wenn man also die Produkte addirt, so wird die Bedingung des Minimums das anzunehmende oder vortheilhafteste Faktorensystem bestimmen. Auf diese Weise findet sich, daß dieß das System der Koeffizienten der Elemente, in jeder Bedingungsgleichung, ist: so daß eine erste Finalgleichung dadurch gebildet wird, daß man gegenseitig jede Bedingungsgleichung mit ihren Koeffizienten des ersten Elements multiplizirt und alle diese so multiplizirte Gleichungen zu einander addirt. Eine zweite Finalgleichung bildet man dadurch, daß man eben so die Koeffizienten des zweiten Elements gebraucht, und so fort. Auf solche Weise entwickeln sich die Elemente und Gesetze der in einer Sammlung vieler Beobachtungen enthaltenen Erscheinungen mit der größten Evidenz.

Die Wahrscheinlichkeit der Irrthümer, welche jedes Element noch befürchten läßt, ist der Zahl proportional, deren hyperbolischer Logarithme die Einheit ist, wenn nämlich diese Zahl auf eine dem im Minimum genommenen Quadrate des Irrthums gleiche Potenz erhoben, und mit einem beständigen Koeffizienten multiplizirt wird, der als der Model der Wahrscheinlichkeit der Irrthümer betrachtet

werden kann: weil, wenn der Irrthum derselbe bleibt, seine Wahrscheinlichkeit mit Schnelligkeit abnimmt, indem jener wächst: so, daß das erhaltene Element um so mehr nach der Seite der Wahrheit hin, wenn ich so sagen kann, wiegt, je größer der Model ist. Daher werde ich diesen Model das Gewicht des Elementes oder Resultats nennen. Dieses Gewicht ist in dem vortheilhaftesten Faktorensystem das möglichgrößte, wodurch dieß System den Vorzug vor andern erhält. Durch eine merkwürdige Analogie dieses Gewichtes mit den Gewichten der an ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte verglichenen Körper geschieht es, daß, wenn ein und dasselbe Element durch verschiedene Systeme gegeben ist, von denen jedes aus einer großen Anzahl von Beobachtungen besteht, das vortheilhafteste mittlere Resultat aus allen zusammen der Summe der Produkte aus jedem partialen Resultate in sein Gewicht gleich ist, wenn diese Summe noch durch die Summe aller Gewichte dividirt wird. Ferner ist das Gesammtgewicht des Resultats aus den verschiedenen Systemen die Summe ihrer partialen Gewichte; so, daß die Wahrscheinlichkeit der Irrthümer des mittlern Resultates aus allen zusammen der Zahl proportional ist, die zum hyperbolischen Logarithmen die Einheit hat, wenn man diese Zahl in eine Potenz erhebt, die dem im Minimum genommenen Quadrate des Irrthums gleich ist, und sie noch mit der Summe aller Gewichte multiplizirt wird. Jedes Gewicht hangt zwar von dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Irrthümer jedes Systems ab, und dieses Gesetz ist fast immer unbekannt; es ist mir aber glücklich gelungen, den dasselbe enthaltenden Faktor zu eliminiren, nämlich vermittelst der Summe der Quadrate der Abweichungen der Beobachtungen des Systems von ihrem mittleren Resultate.

Daher wäre es zu wünschen, daß man, um unsere Kenntnisse von den durch die Zusammenstellung vieler Beobachtungen erhaltenen Resultate zu vervollkommnen, neben jedes Resultat das demselben entsprechende Gewicht schriebe; dazu gibt die Analysis allgemeine und einfache Methoden an die Hand. Wenn man so die Exponentialgröße erhalten hat, welche das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Irrthümer darstellt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß der Irrthum des Resultats in gegebenen Gränzen eingeschlossen sey, dadurch, daß man in diesen Gränzen das Integral des Produkts aus jener Exponentialgröße in das Differential des Irrthums nimmt, und dieses mit der Quadratwurzel aus dem Gewicht des Resultats multiplizirt, nachdem man vorher das Gewicht durch den Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser die Einheit ist, dividirt hat. Daraus folgt, daß sich bei derselben Wahrscheinlichkeit die Irrthümer der Resultate nach den Quadratwürzeln aus ihren Gewichten richten, was zur Vergleichung ihrer gegenseitigen Genauigkeit dienen kann.

Um diese Methode mit Erfolg anzuwenden, müssen die Beobachtungen oder Erfahrungen unter verschiedenen Umständen angestellt werden, damit man die beständigen Ursachen eines Irrthums vermeiden könne. Die Beobachtungen müssen zahlreich seyn, und dieß um so mehr, je mehr Elemente zu bestimmen sind; denn das Gewicht des mittlern Resultates nimmt zu, wie die Anzahl der Beobachtungen, durch die Anzahl der Elemente dividirt.

Auch müssen die Elemente bei solchen Beobachtungen einen verschiedenen Gang befolgen; denn wäre der Gang zweier Elemente genau derselbe, und wären also ihre Koeffizienten in den Bedingungsgleichungen proportional, so

würden diese Elemente nur eine einzige unbekannte Größe bilden, und es würde unmöglich seyn, sie durch die Beobachtung zu unterscheiden. Endlich müssen die Beobachtungen genau seyn; diese Bedingung, die erste von allen, vermehrt das Gewicht des Resultates sehr, dessen Ausdruck die Summe der Quadrate der Abweichungen der Beobachtungen von diesem Resultate zum Divisor hat. Wenn man diese Vorsichtigkeitsregeln beachtet, so läßt sich die genannte Methode zur Abmessung des Grades von Zutrauen gebrauchen, welches die aus vielen Beobachtungen hergeleiteten Resultate verdienen.

Die Regel, die hier gegeben worden ist, um von den Bedingungsgleichungen auf die Finalgleichungen zu schließen, besteht eigentlich darin, die Summe der Quadrate der Beobtungsfehler zu einem Minimum zu machen; denn jede Bedingungsgleichung wird strenge richtig, wenn man die Beobachtung, plus ihrem Irrthum, in dieselbe substituirt; und wenn man hieraus einen Ausdruck für diesen Irrthum sucht, so sieht man leicht, daß die Bedingung des Minimums der Summe der Quadrate dieser Ausdrücke die genannte Regel gibt. Diese ist um so genauer, je zahlreicher die Beobachtungen sind; aber selbst in dem Falle, wenn ihre Anzahl klein ist, scheint es natürlich, dieselbe Regel anzuwenden, da sie in allen Fällen ein einfaches Mittel darbietet, die Verbesserungen, welche man zu bestimmen sucht, ohne Probiren zu erhalten. Dann kann sie auch noch dazu dienen, die Genauigkeit verschiedener astronomischer Tafeln eines und desselben Weltkörpers zu vergleichen. Man kann immer voraussetzen, daß solche Tafeln auf die nämliche Form reduzirt seyen, und dann unterscheiden sie sich nur noch

Bayerische Staatsbibliothek München

durch die Epochen, die mittlern Bewegungen und die Koeffizienten der Argumente; denn wenn die eine einen Koeffizienten enthält, der in den andern fehlt, so läuft dieß natürlich darauf hinaus, den Koeffizienten dieses Arguments in den andern Null zu setzen. Verbesserte man nun diese Tafeln durch die gesammten guten Beobachtungen, so würden sie der Bedingung Genüge leisten, daß die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum sey; die Tafeln, welche, mit einer beträchtlichen Anzahl von Beobachtungen verglichen, dieser Bedingung am nächsten kommen, verdienen also den Vorzug.

In der Astronomie kann die erwähnte Methode vorzüglich mit Vortheil angewendet werden. Die astronomischen Tafeln verdanken die wirklich bewundernswürdige Genauigkeit, welche sie erreicht haben, der Genauigkeit der Beobachtungen und Theorien und dem Gebrauche der Bedingungsgleichungen, durch welche sich eine große Anzahl vortrefflicher Beobachtungen zur Verbesserung eines und desselben Elements vereinigt. Nun war aber noch die Wahrscheinlichkeit der Irrthümer zu bestimmen, die diese Verbesserung noch befürchten läßt, und dazu dient eben die oben angeführte Methode. Um einige interessante Anwendungen derselben zu geben, habe ich die von Bouvard vollendete unermeßliche Arbeit über die Bewegungen Jupiters und Saturns benutzt, von welchen er sehr genaue Tafeln verfertigt hat. Er hat die von Bradley und den auf ihn folgenden Astronomen, bis auf die letztern Jahre, beobachteten Oppositionen und Quadraturen dieser beiden Planeten mit der größten Sorgfalt in Rechnung genommen und daraus die Verbesserungen der Elemente ihrer Bewegung und ihre Massen hergeleitet, letztere mit der Masse der Sonne ver-

gleichen, wenn diese als Einheit genommen wird. Seine Rechnungen geben ihm für die Masse Saturns den 3512. Theil der Masse der Sonne. Indem ich meine Wahrscheinlichkeitsformeln hierauf anwendete, fand ich, daß elf tausend gegen Eins zu wetten sind, daß der Irrthum dieses Resultats nicht den hundertsten Theil seines Werthes betragen oder, was fast ganz dasselbe ist, daß nach hundertjährigen neuen Beobachtungen, wenn diese zu den bisherigen gefügt und auf dieselbe Weise untersucht werden, das dadurch erhaltene Resultat nicht um ein Hundertel von Bouvard's Masse verschieden seyn werde. Die Jupitersmasse findet derselbe gelehrte Astronom so groß, wie den 1071. Theil der Masse der Sonne; und meine Wahrscheinlichkeitsmethode gibt, daß eine Million gegen Eins zu wetten ist, daß dieses Resultat nicht um ein Hundertel fehle.

Die Betrachtung der Wahrscheinlichkeiten kann dazu dienen, die kleinen Ungleichheiten der Bewegungen der Himmelskörper, welche sich mit den Beobachtungsfehlern vermischen herausfinden und bis auf die Ursache der in diesen Bewegungen bemerkten Anomalien vorzudringen. Durch Vergleichung aller seiner Beobachtungen unter einander erkannte Tycho de Brahe die Nothwendigkeit, bei dem Monde eine Gleichung der Zeit anzuwenden, die von der bei der Sonne und den Planeten gebrauchten verschieden war. Eben so fand Mayer durch Zusammenstellung vieler Beobachtungen, daß für den Mond der Koeffizient der Präzessionsungleichheit etwas vermindert werden muß. Da aber diese Verminderung, obgleich Mason dieselbe bestätigt und sogar vermehrt, nicht aus der allgemeinen Schwere zu folgen schien, so vernachläßigten sie die meisten Astronomen in ihren Rechnungen. Nachdem ich eine beträchtliche Menge in

dieser Absicht ausgewählter und von Bouvard auf meine Bitte untersuchter Mondbeobachtungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen hatte, schien mir die Verminderung mit so großer Wahrscheinlichkeit angezeigt zu seyn, daß ich deren Ursache untersuchen zu müssen glaubte. Ich sah bald ein, daß sie nur von der Elliptizität des Erdsphäroids abhangen konnte, die bis dahin in der Theorie der Bewegung des Mondes vernachlässigt worden war, da man glaubte, sie brächte nur unbedeutende Ausdrücke hinein. Ich schloß hieraus, daß diese Ausdrücke durch die auf einander folgende Integrationen der Differentialgleichungen doch wohl bedeutend werden möchten. Also bestimmte ich diese Ausdrücke durch eine eigenthümliche Analysis und entdeckte zuerst die Ungleichheit der Bewegung des Mondes in der Breite, welche dem Sinus der Länge des Mondes proportional ist und noch von keinem Astronomen vermuthet worden war. Dann erkannte ich, vermittelst dieser Ungleichheit, daß noch eine andere bei der Bewegung des Mondes in der Länge Statt findet, welche die von Mayer bemerkte Verminderung in der bei dem Monde anzubringenden Präzessionsgleichung hervorbringt. Die Größe dieser Verminderung und der Koeffizient der vorher genannten Ungleichheit in der Breite sind sehr dazu geeignet, die Abplattung der Erde zu bestimmen. Meine Untersuchungen hierüber theilte ich Bürg mit, welcher sich gerade damals mit der Vervollkommnung der Mondtafeln durch Vergleichung aller guten Beobachtungen beschäftigte, und bat ihn, jene beiden Größen mit besonderer Sorgfalt zu bestimmen. So ergab sich die äußerst merkwürdige Uebereinstimmung, daß die von ihm gefundenen Werthe der Erde dieselbe Abplattung geben, nämlich $1/305$, welche Abplattung noch dazu von dem aus

den Messungen der Meridiangrade und der Pendellänge hergeleiteten Mittel wenig abweicht und mir doch, wegen des Einflusses der Beobachtungsfehler und der störenden Ursachen auf diese Messungen, durch jene Mondungleichheiten genauer bestimmt zu seyn scheint.

Eben so erkannte ich durch die Betrachtung der Wahrscheinlichkeiten die Ursache der Säkulargleichung des Mondes. Die Vergleichung der heutigen Beobachtungen dieses Weltkörpers mit den von den Alten beobachteten Finsternissen hatten den Astronomen eine Beschleunigung in der Bewegung des Mondes angezeigt; da aber die Geometer, vorzüglich Lagrange, in den Störungen, welche die Mondbewegung erleidet, die Ausdrücke, von denen ihre Beschleunigung abhangt, vergeblich gesucht hatten, verwarfen sie dieselbe. Eine genaue Untersuchung der alten und neuern Beobachtungen und der von den Arabern in der Zwischenzeit beobachteten Finsternisse zeigte mir, daß sie mit großer Wahrscheinlichkeit angezeigt war. Hierauf nahm ich die Mondtheorie unter diesem Gesichtspunkte wieder vor und fand, daß die Säkulargleichung des Mondes von der mit der Säkularänderung der Exzentrizität der Erdbahn verbundenen Wirkung der Sonne auf den Mond herrührt; dadurch entdeckte ich die Säkulargleichungen der Bewegungen der Knoten und der Erdnähe und der Mondbahn, welche Gleichungen die Astronomen nicht einmal geahnet hatten. Die höchst merkwürdige Uebereinstimmung dieser Theorie mit allen alten und neuern Beobachtungen hat ihr den höchsten Grad von Evidenz gegeben.

Auch führte mich die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Ursache der großen Unregelmäßigkeiten Jupiters und Saturns. Durch Vergleichung neuerer Beobachtungen mit

den alten fand Halley eine Beschleunigung in der Bewegung Jupiters und eine Verminderung in der Bewegung Saturns. Um die Beobachtungen zur Uebereinstimmung zu bringen, unterwarf er diese Bewegungen zweien Säkulargleichungen mit entgegengesetzten Zeichen, welche wie die Quadrate der seit 1700 verflossenen Zeiten zunahmen. Euler und Lagrange wendeten die Analysis auf die Störungen an, die in den Bewegungen der beiden Planeten durch ihre gegenseitige Anziehung entstehen mußten. Sie fanden darin zwar Säkulargleichungen; aber ihre Resultate waren so verschieden, daß wenigstens eins von beiden irrig seyn mußte. Ich beschloß daher, mich mit dieser wichtigen Aufgabe der Mechanik des Himmels zu beschäftigen, und fand, daß die mittlern Bewegungen der Planeten unveränderlich seyn müssen; dadurch verschwanden die von Halley in die Tafeln Jupiters und Saturns eingeführten Säkulargleichungen. Nun blieb zur Erklärung der großen Ungleichheiten dieser Planeten nichts weiter übrig, als die Anziehungen der Kometen, zu denen wirklich mehrere Astronomen ihre Zuflucht nahmen, oder das Daseyn einer Ungleichheit mit langer Periode, welche den Bewegungen beider Planeten durch ihre gegenseitige Anziehung hervorgebracht wird, und für jeden entgegengesetzte Zeichen hat. Durch einen Lehrsatz, welchen ich über die Ungleichheiten solcher Art auffand, wurde mir diese Ungleichheit sehr wahrscheinlich. Nach diesem Lehrsatze vermindert sich die Bewegung Saturns, wenn die Bewegung Jupiters zunimmt, und dieß ist schon dem gemäß, was Halley bemerkt hatte; ferner verhält sich die aus demselben Lehrsatze entspringende Beschleunigung der Bewegung Jupiters zu der Verminderung der Bewegung Saturns fast ganz genau, wie die von Halley

vorgeschlagenen Säkulargleichungen. Bei der Betrachtung der mittlern Bewegungen Jupiters und Saturns sah ich leicht ein, daß das Doppelte der mittlern Bewegung Jupiters die fünffache mittlere Bewegung Saturns nur um eine sehr geringe Größe übertrifft. Die Periode einer Ungleichheit, welche dieses Argument hätte, würde ungefähr von neun hundert Jahren seyn. Ihr Koeffizient würde zwar von der Ordnung der Kuben der Exzentrizitäten der Bahnen seyn; ich wußte aber, daß er durch die auf einander folgenden Integrationen das Quadrat des sehr kleinen Multiplikators der Zeit in dem Argumente dieser Ungleichheit zum Divisor bekommt, wodurch er einen großen Werth erhalten kann; daher schien es mir sehr wahrscheinlich, daß diese Ungleichheit Statt finde. Folgende Bemerkung erhöhte noch ihre Wahrscheinlichkeit. Wenn ich ihr Argument um die Zeit, da Tycho de Brahe beobachtete, Null setzte, so sah ich, daß Halley durch Vergleichung neuerer Beobachtungen mit den alten die von ihm angezeigten Störungen finden mußte, während die Vergleichung neuerer Beobachtungen unter sich gerade entgegengesetzte Störungen geben mußte, denen ähnlich, welche Lambert aus einer solchen Vergleichung geschlossen hatte. So schien mir also das Daseyn dieser Ungleichheit äußerst wahrscheinlich, und nun stand ich nicht länger an, die zu der Versicherung hiervon nöthige lange und mühsame Rechnung zu übernehmen. Jenes durch das Resultat dieser Rechnung völlig bestätigt, durch welche ich überdieß noch eine große Anzahl anderer Ungleichheiten kennen lernte, die zusammengenommen den Tafeln Jupiters und Saturns die Genauigkeit der Beobachtungen selbst gegeben haben.

Ferner fand ich durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung das merkwürdige Gesetz der mittlern Bewegungen der drei ersten Jupiterstrabanten, nach welchem die mittlere Länge des ersten, minus der dreifachen des zweiten, plus der doppelten des dritten, ganz genau dem halben Kreisumfange gleich ist. Die Näherung, mit welcher die mittlern Bewegungen jener Weltkörper dieses Gesetz seit ihrer Entdeckung befolgen, zeigte dessen Daseyn mit außerordentlicher Wahrscheinlichkeit an; ich suchte also die Ursache desselben in ihrer gegenseitigen Anziehung. Eine gründliche Untersuchung dieser Anziehung zeigte mir, daß sich anfänglich nur die Verhältnisse ihrer mittlern Bewegungen der genannten Gesetze, in gewissen Gränzen zu nähern brauchten, da denn ihre gegenseitige Wirkung auf einander es hervorbrachte, und in aller Strenge erhält. Also werden nach dem vorhergehenden Gesetze diese drei Körper sich immerfort das Gleichgewicht im Weltraume halten, wenn nicht fremde Ursachen, wie die Kometen, ihre Bewegungen um Jupiter plötzlich ändern.

Daraus zeigt sich, wie aufmerksam man auf die Anzeigen der Natur seyn muß, wenn sie das Resultat sehr vieler Beobachtungen sind und sich überdieß nicht durch die bekannten Mittel erklären lassen. Die außerordentliche Schwierigkeit der sich aufs Weltsystem beziehenden Aufgaben zwang die Geometer, Näherungen zu Hülfe zu nehmen, die immer noch befürchten lassen, die vernachlässigten Größen möchten einen merklichen Einfluß haben. Sobald sie aber solchen Einfluß aus Beobachtungen merkten, kamen sie auf ihre Analysis zurück, verbesserten dieselben, fanden dadurch jedesmal die Ursache der beobachteten Ungleichheiten, bestimmten deren Gesetze und kamen der Beobachtung oft

durch Entdeckung von Ungleichheiten zuvor, die sie noch nicht angezeigt hatte. So läßt sich behaupten, daß die Natur selbst zu der analytischen Vervollkommnung der auf den Grund der allgemeinen Schwere gebauten Theorien beigetragen hat, welches, wie ich glaube, zu einem der stärksten Beweise des wirklichen Daseyns dieser bewundernswürdigen Kraft dienen kann.

Eine der auffallendsten Erscheinungen im Weltsysteme ist die, daß alle Rotations- und Umlaufsbewegungen der Haupt- und Nebenplaneten in der Richtung der Umwälzung der Sonne vor sich gehen und ungefähr in der Ebene ihres Aequators liegen. Eine so merkwürdige Erscheinung ist nicht Wirkung des Zufalls; sie zeigt eine allgemeine Ursache an, die alle diese Bewegungen bestimmt. Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, mit welcher die Ursache angezeigt ist, bemerken wir, daß das Planetensystem, wie wir es jetzt kennen, aus elf Haupt- und neunzehn Nebenplaneten besteht. Die Rotationsbewegungen von sechs Planeten, der Sonne, der Monde Jupiters, des Ringes von Saturn und eines seiner Trabanten sind beobachtet worden.

Diese Bewegungen bilden mit den Umlaufsbewegungen eine Summe von drei und vierzig Bewegungen, die alle in derselben Richtung erfolgen; nun gibt die Analysis der Wahrscheinlichkeiten, daß mehr als vier Billionen gegen Eins zu wetten sind, daß diese Anordnung nicht Wirkung des Zufalls sey, welche Wahrscheinlichkeit weit größer ist, als die Wahrscheinlichkeit der geschichtlichen Begebenheiten, über die man sich keinen Zweifel erlaubt. Daher müssen wir wenigstens mit derselben Zuversicht glauben, daß eine anfängliche Ursache die Planetenbewegung gelenkt hat, besonders, wenn

wir bedenken, daß die Neigung der meisten dieser Bewegungen gegen den Sonnenäquator sehr gering ist.

Noch eine andere eben so merkwürdige Erscheinung im Sonnensystem ist die unbedeutende Exzentrizität der Planeten- und Trabantenbahnen, dagegen die Bahnen der Kometen sehr exzentrisch sind, so, daß überhaupt in diesem System keine allmählige Abstufungen von einer großen Exzentrizität zu einer kleinen bei den Bahnen Statt finden. Auch hierin sind wir genöthigt, die Wirkung einer regelmäßigen Ursache anzuerkennen; der Zufall hätte nie den Bahnen aller Planeten und ihrer Monde eine fast kreisförmige Gestalt gegeben; daher muß die Ursache, welche die Bewegungen dieser Weltkörper bestimmt hat, sie ungefähr kreisförmig gemacht haben. Ferner müssen die großen Exzentrizitäten der Kometenbahnen von dem Daseyn einer solchen Ursache herrühren, doch ohne daß diese auf die Richtungen ihrer Bewegungen Einfluß gehabt hat; denn es finden sich fast eben so viele rückläufige, als rechtläufige Kometen, und aller ihrer Bahnen mittlere Neigung gegen die Ekliptik kommt einem halben rechten Winkel sehr nahe, wie dieß der Fall seyn muß, wenn die Kometen anfänglich, wie es der Zufall gab, fortgeschleudert wurden.

Wie auch die Natur der genannten Ursache beschaffen gewesen seyn mag, so muß sie doch, da sie die Bewegungen der Planeten hervorgebracht oder gelenkt hat, alle diese Weltkörper umfaßt haben; und da diese durch große Zwischenräume von einander getrennt sind, so kann sie nur ein Fluidum von unermeßlicher Ausdehnung gewesen seyn, und muß, da sie ihnen in derselben Richtung eine fast kreisförmige Bewegung um die Sonne gegeben hat, wie eine Atmosphäre die Sonne eingehüllt haben. Die Betrachtung der Planeten-

bewegungen führt uns also auf den Gedanken, daß sich durch eine außerordentliche Hitze die Sonnenatmosphäre ursprünglich über die Bahnen aller Planeten hinaus erstreckt und nach und nach wieder in ihre jetzigen Gränzen zurückgezogen hat.

In diesem vorausgesetzten ursprünglichen Zustande ähnelte die Sonne den Nebelflecken, von welchen uns die Fernröhre zeigen, daß sie einen mehr oder minder glänzenden Kern enthalten, von einem nebelartigen Schimmer umgeben, der, wenn er sich auf der Oberfläche des Kerns verdichtet, ihn einst in einen Fixstern verwandeln muß. Denkt man sich, der Aehnlichkeit nach, alle auf solche Weise entstandene Sterne, so kann man sich vor ihrem frühern Nebelzustande noch andere Zustände vorstellen, in welchen die nebelartige Materie mehr ausgebreitet und der Kern noch nicht so leuchtend und dicht war. So gelangt man, indem man so weit als möglich zurückgeht, zuletzt auf einen so sehr ausgebreiteten Nebel, daß sich dessen Daseyn kaum vermuthen ließe.

Dieß ist in der That der ursprüngliche Zustand der von Herschel mit äußerster Sorgfalt vermittelst seiner mächtigen Teleskope beobachteten Nebelflecke, bei welchen er die Zunahmen der Verdichtung verfolgt hat, zwar nicht an einem einzelnen, da diese Verdichtungen für uns nur nach Jahrhunderten merkbar werden können, sondern durch vergleichende Zusammenstellung aller; ungefähr so, wie man in einem großen Walde dem Wachsthume der Bäume an den Individuen verschiedenes Alters, die er erhält, folgen kann. Herschel bemerkte theils, daß solche nebelartige Materie, verschiedentlich gehäuft, in den verschiedenen Theilen des Himmels verbreitet ist, von dem sie einen großen Theil

einnimmt. Theils sah er in einigen solcher Haufen diese Materie um einen oder mehrere wenig glänzende Kerne schwach verdichtet.

In andern Nebelflecken glänzen die Kerne heller, in Vergleichung mit der sie umgebenden Nebelhülle. Wenn sich so die Atmosphären jedes Kerns durch fortgesetzte Verdichtung trennen, so entstehen daraus vervielfältigte Nebelflecke, die aus sehr nahe liegenden glänzenden Kernen bestehen, von welchen jeder mit einer Atmosphäre umgeben ist; bei andern hat die nebelartige Materie dadurch, daß sie sich einförmig verdichtete, die sogenannten planetarischen Nebelflecken hervorgebracht. Noch ein größerer Grad von Verdichtung verwandelt alle diese Nebelflecke in wirkliche Fixsterne. Ordnet man die Nebelflecke nach dieser philosophischen Ansicht, so zeigen sie mit äußerst großer Wahrscheinlichkeit ihre künftige Verwandlung in Fixsterne und den frühern Nebelzustand der jetzigen Fixsterne an. Folgende Betrachtungen unterstützen noch die aus diesen Analogien gezogenen Beweise.

Schon seit langer Zeit ist die besondere Stellung einiger mit bloßen Augen sichtbaren Sterne denkenden Beobachtern aufgefallen. Mitchel bemerkte bereits, wie es so gar nicht wahrscheinlich wäre, daß, zum Beispiel, die Sterne der Plejaden bloß durch Wirkungen des Zufalls in den engen Raum gedrängt worden seyen, der sie einschließt; und er folgerte daraus, daß dieser Sternhaufen und die ihm ähnlichen Gruppen am Himmel durch irgend eine ursprüngliche Ursache oder ein allgemeines Naturgesetz entstanden seyn müßten. Solche Gruppen sind eine nothwendige Folge der Verdichtung von Nebelflecken mit mehrern Kernen; denn natürlich müssen diese zuletzt, wenn die nebelartige Ma-

terie unaufhörlich von den verschiedenen Kernen angezogen wird, eine Sterngruppe bilden, ähnlich den Plejaden. So bildet die Verdichtung von Nebelflecken mit zwei Kernen sehr nahe an einander stehende Sterne, von welchen sich einer um den andern dreht, wie schon Herschel solche gegenseitige Bewegungen beobachtet hat. Eben so verhält es sich mit dem ein und sechszigsten Sterne im Schwan und seinem Begleiter, an denen Bessel so beträchtliche und so wenig verschiedene eigene Bewegung erkannt hat, daß die geringe Entfernung dieser Sterne von einander und ihre Bewegung um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt keinen Zweifel mehr übrig lassen. Auf diese Weise nach den allmähligen Verdichtungsstufen der nebelartigen Materie vorwärts schließend, gelangt man zu der Betrachtung einer weit ausgedehnten Atmosphäre, die die Sonne ehemals umgeben haben muß, zu welcher man, wie wir gesehen haben, ebenfalls gelangt, wenn man nach der Prüfung der Erscheinungen im Sonnensystem rückwärts schließt. Ein so merkwürdiges Zutreffen gibt dem Daseyn dieses vormaligen Zustandes der Sonne eine sich der Gewißheit stark nähernde Wahrscheinlichkeit.

Wie konnte aber eine solche Sonnenatmosphäre die Rotations- und Umlaufsbewegungen der Haupt- und Nebenplaneten hervorbringen? Wenn diese Weltkörper tief in die Atmosphäre getaucht waren, so mußten sie durch den Widerstand derselben auf die Sonne fallen; daher erhält die Meinung große Wahrscheinlichkeit, daß sich die Planeten an den nach und nach immer enger werdenden Gränzen der Sonnenatmosphäre gebildet haben, die dadurch, daß sie sich durch Erkältung zusammenzog, in der Ebene ihres Aequators Dunstzonen zurücklassen mußte, welche die gegenseitige Anziehung

ihrer kleinsten Theile in verschiedene kugelähnliche Körper verwandelte.

In meiner Darstellung des Weltsystems habe ich diese Voraussetzung ausführlich entwickelt, welche mir allen im Sonnensysteme vorkommenden Erscheinungen Genüge zu leisten scheint.

Unter dieser Voraussetzung sind die Kometen dem Plänetensystem fremd. Wenn man ihre Entstehung an die Bildung der Nebelflecke knüpft, so möchten sie sich als kleine Nebelflecke mit Kernen betrachten lassen, die von Sonnensystemen zu Sonnensystemen umherirrten und durch die Verdichtung der in so großer Ausdehnung im Weltraume verbreiteten nebelartigen Materie gebildet wurden. So wären also die Kometen in Bezug auf unser Sonnensystem, was die Aerolithen in Bezug auf die Erde sind, welcher sie fremd scheinen. Wenn die Kometen für uns sichtbar werden, so haben sie eine so vollkommne Aehnlichkeit mit den Nebelflecken, daß man sie oft mit diesen verwechselt; und nur durch ihre Bewegung oder durch die Bekanntschaft mit allen Nebelflecken in dem Theile des Himmels, an welchem sie sich zeigen, kann man sie davon unterscheiden. Diese Annahme erklärt glücklich die große Ausdehnung der Kerne und Schweife der Kometen, die immer zunimmt, je mehr sie sich der Sonne nähern, und zugleich die außerordentliche Lockerheit der Schweife, welche ungeachtet ihrer sehr großen Tiefe den Glanz der durch dieselben gesehenen Sterne nicht merklich schwächen.

Wenn kleine Nebelflecke in den Theil des Weltraums gerathen, in welchem die Anziehung der Sonne vorherrschend ist, und welchen wir den Wirkungskreis dieser letztern nennen wollen, so werden sie von der Sonne gezwun-

gen, elliptische oder hyperbolische Bahnen zu beschreiben. Da aber die Richtung ihrer Geschwindigkeit nach allen Seiten hinaus gleich möglich ist, so müssen sie sich unbestimmt nach allen Richtungen hin und unter allen möglichen Neigungen gegen die Ekliptik bewegen, welches auch durch die Beobachtungen bestätigt wird.

Auch die große Exzentrizität der Kometenbahnen folgt aus der vorhergehenden Voraussetzung. Denn wenn diese Bahnen elliptisch sind, so müssen sie sehr länglich seyn, da ihre großen Axen wenigstens dem Halbmesser des Wirkungskreises der Sonne gleich sind. Die Bahnen können aber hyperbolisch seyn, und wenn die Axen dieser Hyperbeln gegen die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde nicht sehr groß sind, so wird die Bewegung der dieselben beschreibenden Kometen merklich hyperbolisch erscheinen. Jedoch läßt sich nicht mit Gewißheit behaupten, daß unter hundert Kometen, deren Elemente man schon kennt, sich auch nur ein einziger in einer Hyperbel bewege; also muß der Zufall, welcher eine merkbare Hyperbel hervorbringt, in Vergleich mit dem entgegengesetzten Zufalle äußerst selten vorkommen.

Die Kometen sind so klein, daß, wenn sie uns sichtbar werden sollen, ihre Entfernung von der Sonne im Perihelium sehr gering seyn muß. Bis jezt hat diese Entfernung den Dunstmesser der Erdbahn nur zweimal übertroffen, und am häufigsten ist sie kleiner gewesen, als der Halbmesser der Erdbahn. Begreiflich muß, wenn sie sich der Sonne so sehr nähern sollen, ihre Geschwindigkeit im Augenblicke ihres Eintritts in den Wirkungskreis der Sonne eine in engen Gränzen eingeschlossene Größe und Richtung haben. Indem ich durch die Analysis der Wahrscheinlichkeiten das Verhältniß der Zufälle, welche in diesen Gränzen eine merkbare

Hyperbel geben, zu den Zufällen, welche eine mit der Parabel zu verwechselnde Bahn geben, bestimmte, fand ich, daß wenigstens sechs tausend gegen Eins zu wetten sind, daß ein in den Wirkungskreis der Sonne so weit eindringender Nebelfleck, daß er beobachtet werden kann, entweder eine sehr längliche Ellipse oder eine solche Hyperbel beschreiben wird, die in ihrem für uns zu beobachtenden Theile wegen der Größe ihrer Axe mit einer Parabel fast gänzlich zusammenfällt; daher kann es nun nicht mehr auffallen, daß man bisher an Kometen keine hyperbolische Bewegungen bemerkt hat.

Die Anziehung der Planeten und vielleicht auch der Widerstand der ätherischen Mittel mußte manche Kometenbahnen in Ellipsen verwandeln, deren große Axe kleiner ist, als der Halbmesser des Wirkungskreises der Sonne, dadurch vermehren sich noch die veränderlichen Zufälle bei den elliptischen Bahnen. Es ist glaublich, daß eine solche Veränderung bei dem Kometen von 1682 Statt gefunden hat, bis jetzt dem einzigen, dessen Revolution sich bestätigt hat.

Jetzt wollen wir die Erde und dieselben bedeckenden Flüssigkeiten betrachten. Die Erscheinung, welche am meisten Licht über die Regelmäßigkeit ihrer Schichten verbreiten kann, ist die Veränderung der Schwere auf ihrer Oberfläche. Diese Veränderung läßt sich entweder dadurch bestimmen, daß man ein und dasselbe Pendel an verschiedene Oerter hinbringt und daselbst die Anzahl seiner Schwingungen in einer gegebenen Zeit zählt, oder dadurch, daß man an denselben direkt die Länge des Säkundenpendels mißt. Solche Versuche sind leicht und können jetzt äußerst genau angestellt werden; da sie in der Theorie der Erde so wichtig sind, so sollten sie den Seefahrern besonders empfohlen wer-

den. Obgleich die schon gemachten Versuche hierüber noch viel zu wünschen übrig lassen, so befolgen sie doch einen sehr regelmäßigen Gang, der sich dem einfachen Veränderungsgesetze, nämlich dem nach dem Quadrate des Sinus der Breite, sehr nähert; die nördliche und die südliche Halbkugel geben in dieser Hinsicht keinen merklichen Unterschied oder wenigstens nur einen solchen, den man auch den Beobachtungsfehlern zuschreiben kann. Wenn man die Länge des Sekundenpendels unter dem Aequator zur Einheit annimmt, so folgt aus jenen Beobachtungen zusammengenommen, daß der Koeffizient des dem Quadrate des Sinus der Breite proportionalen Ausdrucks 551 Hunderttausendstel ist. Die Anwendung meiner Wahrscheinlichkeitsformeln auf dieses Resultat gibt, daß sich 2177 gegen Eins wetten lassen, daß der wahre Koeffizient zwischen den Gränzen fünf und sechs Tausendstel enthalten sey. Ist die Erde ein Umdrehungsellipsoid, so erhält man ihre Abplättung, wenn man den Koeffizienten des Gesetzes der Schwere von 875 Hunderttausendsteln abzieht. Der Koeffizient fünf Tausendstel entspricht, so der Abplattung $\frac{1}{272}$; es lassen sich also 4354 gegen Eins wetten, daß die Abplattung der Erde unter diesem Bruche sey. Dagegen sind Tausende von Billionen gegen Eins zu wetten, daß sie geringer sey, als die der Gleichartigkeit der Erde entsprechende Abplattung, und daß die Erdschichten an Dichtigkeit zunehmen, je mehr sie sich dem Mittelpunkte unseres Planeten nähern. Die Regelmäßigkeit der Schwere auf der Erdoberfläche beweißt, daß sie symmetrisch um ihren Mittelpunkt gelagert sind.

Diese beiden Bedingungen sind nothwendige Folgen eines vormaligen flüssigen Zustandes und könnten augen-

scheinlich bei der Erde nicht Statt finden, wenn sie nicht ursprünglich in solchem Zustande gewesen wäre, den die ganze Erde nur durch eine außerordentliche Hitze erhalten konnte; dieß unterstützt die Voraussetzung, welche wir über die Bildung der Weltkörper aufgestellt haben.

Zufolge einer Aufforderung der Pariser Akademie der Wissenschaften wurden in Brest am Anfange des verflossenen Jahrhunderts Fluthbeobachtungen angestellt, und sechs Jahre hinter einander fortgesetzt. Die Lage des dasigen Hafens ist für diese Art Beobachtungen sehr günstig. Er ist durch einen Kanal mit dem Meere verbunden, der sich in einer sehr geräumigen Rhede endigt, in deren Grunde der Hafen gebaut worden ist. Die Unregelmäßigkeiten der Bewegung des Meeres kommen also sehr geschwächt in diesem Hafen an; ungefähr so, wie die durch die unregelmäßige Bewegung eines Schiffes im Barometer hervorgebrachten Schwankungen durch eine an der Röhre dieses Instrumentes angebrachte Verengerung verringert werden. Da überdieß Ebbe und Fluth in Brest beträchtlich ist, so machen die durch die Winde verursachten zufälligen Veränderungen nur einen kleinen Theil derselben aus. Auch zeigt sich in diesen Fluthbeobachtungen eine große Regelmäßigkeit, die durch den kleinen Fluß nicht gestört werden konnte, der sich in der überaus großen Rhede jenes Hafens verliert. Diese Regelmäßigkeit fiel mir auf, und ich ersuchte die Regierung, während einer ganzen Periode der Knotenbewegung der Mondbahn eine neue Reihe von Beobachtungen in Brest anstellen zu lassen, welches auch geschehen ist. Diese Beobachtungen fangen am 1. Juni 1806 an, und sind seitdem bis zum Jahre 1816 ohne Unterbrechung fortgesetzt worden;

der Zeitraum übertrifft also schon die Hälfte der verlangten Periode.

Die Gesetze der Höhen und der Zwischenzeiten der Fluthen, in Bezug auf die Mondphasen, die Jahrszeiten und die Entfernungen des Mondes und der Sonne von der Erde, zeigen sich bei der vortheilhaftesten Kombination der Gesammtheit dieser Beobachtungen mit außerordentlich großer Wahrscheinlichkeit. In dieser Hinsicht stimmen sie aufs vollkommenste mit den vor einem Jahrhundert angestellten Beobachtungen überein. Eben so gut stimmen sie mit dem allgemeinen Gesetze der Schwere, welches sich durch sie allein hätte folgern lassen.

Die Theorie der Ebbe und Fluth, die ich nach diesem Gesetze im vierten Buche meiner Mechanik des Himmels gegeben habe, beruht auf einem Grundsatze der Dynamik, durch welchen sie sehr einfach und von den örtlichen Umständen des Hafens unabhängig wird, welche Umstände zu verwickelt sind, als daß es möglich wäre, sie der Berechnung zu unterwerfen. Vermittelst jenes Grundsatzes treten sie als willkürliche Größen in die Resultate der Analysis, die also die Beobachtungen darstellen müssen, wenn die allgemeine Schwerkraft wirklich die wahre Ursache der Ebbe und Fluth des Meeres ist. Der Grundsatz, welcher auch auf viele andere Erscheinungen angewendet werden kann, ist folgender: Der Zustand eines Systems von Körpern, in welchem die anfänglichen Bedingungen der Bewegung durch gefundenen Widerstand verschwunden sind, ist eben so, wie die darauf wirkende Kräfte, periodisch. Die Verbindung desselben mit dem Grundsatze der Koexistenz sehr kleiner Schwingungen gab mir einen Ausdruck für die

Fluthhöhe, dessen Konstanten die Wirkung der örtlichen Umstände des Hafens in sich fassen. Die zahlreichen Verschiedenheiten der Ebbe und Fluth und die Modifikationen, welche sie durch die Lokalitäten erleiden, werden alle mit einer außerordentlichen Genauigkeit durch jenen Ausdruck dargestellt. Eine der merkwürdigsten dieser Modifikationen ist das anderthalbtägige Zurückbleiben der größten und kleinsten Fluthen nach den Augenblicken der Syzygien und Quadraturen. Der genannte Ausdruck zeigt, daß dieses von der Kombination der schnellen Bewegung des auf den Ozean wirkenden Weltkörpers mit den örtlichen Umständen abhangt, und daß dieselbe Ursache in Brest eine Vergrößerung in dem Verhältnisse der Wirkungen der Sonne und des Mondes hervorbringt. Die Analysis gibt mehrere Mittel an die Hand, um diese Vergrößerung durch die Beobachtungen zu bestimmen. Indem ich meine Wahrscheinlichkeitsformeln darauf anwende, finde ich, daß ein und zwanzig tausend und vier hundert gegen Eins zu wetten sind, daß sie zu Brest Statt finde; aus den Beobachtungen ergibt sich, daß sie beinahe ein Achtel des wahren Verhältnisses ist; daraus folgt, daß die Mondmasse, deren Kenntniß in der Astronomie wichtig ist, $\frac{1}{69}$ der Masse der Erde sey.

Die Wirkung der Sonne und des Mondes bringt ohne Zweifel in unserm Luftkreise, durch welchen sie hindurch muß, ehe sie das Meer erreicht, ähnliche Schwankungen hervor, wie Ebbe und Fluth. Diese sind aber sehr schwach, und um sie mitten aus den Bewegungen der Atmosphäre herauszufinden, wird eine lange Reihe mit vortrefflichen Barometern angestellter Beobachtungen erforderlich seyn, vorzüglich

unter dem Aequator, wo die unregelmäßigen Veränderungen der Atmosphäre nicht so beträchtlich sind. (*)

Der Grundsatz, auf welchen sich meine Theorie der Ebbe und Fluth stützt, kann durch Verallgemeinerung auf alle Wirkungen des Zufalls ausgedehnt werden, mit denen sich veränderliche Ursachen nach regelmäßigen Gesetzen verbinden. Die Aktion dieser Ursache bringt in den Resultaten vieler Wirkungen Verschiedenheiten hervor, welche dieselben Gesetze befolgen und sich durch die Analysis der Wahrscheinlichkeiten erkennen lassen; je mehr sich die Wirkungen vervielfältigen, mit desto größerer Wahrscheinlichkeit zeigen sich jene

*) Wir können hier nicht unbemerkt lassen, daß uns bis jetzt noch keine richtige Theorie über Ebbe und Fluth zu Gesicht gekommen ist, und so auch noch keine über tägliche Änderungen der Barometerhöhen. Die Hydrauliker wissen zu gut, wie sehr die Bewegung des Wassers, welche vermöge einwirkender Kräfte erfolgen sollte, durch mannigfaltige Hindernisse geschwächt wird. Wir haben aber Ebben und Fluthen, die, alle Hindernisse bei Seite gesetzt, die vereinten Wirkungen von Sonnen und Mond weit übertreffen. Auch haben wir keine Theorie gefunden, welche auf den Einfluß Rücksicht nehme, welcher die aus der Bewegung der Erde um die Sonne entstehende Centrifugelkraft Rücksicht nehme, da doch diese die Wirkung unserer Schwere bei Tage vermindert und bei Nacht vergrößert. Wir haben diese Bemerkung schon vor mehr als 20 Jahren einigen Gelehrten mitgetheilt, aber nicht bemerkt, daß darauf geachtet worden wäre.

Verschiedenheiten, und diese würde die Gewißheit selbst werden, wenn die Anzahl der Wirkungen unendlich wäre.

Dieser Lehrsatz ist dem Satze ähnlich, welchen ich vorher über die Wirkung der beständigen Ursachen entwickelt habe. Jedesmal also, wenn wir sehen, daß eine Ursache, deren Gang regelmäßig ist, auf irgend eine Art von Begebenheiten einen Einfluß kann haben, können wir ihren Einfluß durch Vervielfältigung der Beobachtungen kennen zu lernen suchen; und wenn sich dieser Einfluß wirklich zu zeigen scheint, so läßt sich die Wahrscheinlichkeit seines Daseyns und seiner Intensität durch die Analysis der Wahrscheinlichkeiten bestimmen. So ist, da die Verschiedenheit der Temperatur bei Tage von der Temperatur bei Nacht den Druck der Atmosphäre und folglich den Stand des Barometers modifiziren kann, der Gedanke natürlich, daß vervielfältigte Beobachtungen des Barometerstandes den Einfluß der Sonnenwärme darthun müssen. Wirklich hat man auch schon seit langer Zeit unter dem Aequator, wo dieser Einfluß am größten zu seyn scheint, eine kleine tägliche Veränderung des Barometerstandes bemerkt, deren Maximum gegen neun Uhr des Morgens und deren Minimum gegen vier Uhr des Abends eintritt.

Ein zweites Maximum findet gegen elf Uhr des Abends, und das zweite Minimum gegen vier Uhr des Morgens Statt. Die Schwankungen sind bei Nacht geringer als am Tage; der Umfang dieser letztern beträgt zwei Millimeter. Auch ist, ungeachtet der Unbeständigkeit unserer Klimate, diese Veränderung unsern Beobachtern nicht entgangen, obgleich sie bei uns nicht so merklich ist, wie zwischen den Wendekreisen. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsformeln auf die von Ramond mehrere Jahre hin-

ter einander angestellten zahlreichen und genauen Beobachtungen zeigt, daß sie das Daseyn einer solchen Erscheinung mit einer äußerst großen Wahrscheinlichkeit angeben. Durch diese Beobachtungen entdeckte Ramond auch noch eine von den Jahrszeiten abhängige Veränderung im Barometerstande.

Das erste Maximum der monatlichen mittlern Barometerhöhe findet er kurz nach dem Wintersolstitium, das erste Minimum im April; ein zweites Maximum fällt um das Sommersolstitium und ein zweites Minimum in den September. Die Analysis zeigt uns, daß diese Resultate schon mit Wahrscheinlichkeit angezeigt werden; sie werden übrigens noch durch andere Beobachtungen bestätigt. Die Folge der Zeiten wird darthun, ob die Monate der größten und kleinsten Höhen in den verschiedenen Klimaten dieselben sind. Diese jährlichen und täglichen Veränderungen des Barometerstandes entstehen ohne Zweifel, so wie die Passatwinde und die Moussons, durch die Kombination der Wirkung der Sonnenhitze mit der Umdrehungsbewegung der Erde. Die Berechnung so entwickelter Wirkungen ist aber fast unmöglich.

Außerdem läßt sich noch durch die Analysis der Wahrscheinlichkeiten das Daseyn oder der Einfluß gewisser Ursachen untersuchen, deren Wirkung auf die organischen Wesen man zu bemerken glaubte. Unter allen Werkzeugen, welche wir zur Erkenntniß der unbemerkbaren Agentien der Natur anwenden können, sind die Nerven die empfindlichsten, vorzüglich dann, wenn besondere Ursachen ihre Empfindlichkeit erhöhen. Durch die Nerven hat man die schwache Elektrizität entdeckt, welche die Berührung zweier verschiedenartigen Metalle hervorbringt; dadurch wurde den Untersuchun-

gen der Physiker und Chemiker ein weites Feld eröffnet. Die sonderbaren Erscheinungen, welche aus übergroßer Empfindlichkeit der Nerven bei einigen Individuen entstehen, haben verschiedene Meinungen über das Daseyn eines neuen Agens veranlaßt, animalischer Magnetismus genannt; ferner über die Wirkung des gewöhnlichen Magnetismus, über den Einfluß der Sonne und des Mondes bei einigen Affektionen der Nerven, so wie über die Eindrücke, welche die Nähe von Metallen oder eines fließenden Wassers hervorbringen kann. (*) Natürlich wird die Wirkung solcher Ursachen sehr schwach und durch zufällige Umstände leicht zu stören seyn; darum aber, weil sie sich in einigen Fällen nicht offenbar gezeigt hat, ist ihr Daseyn noch nicht zu verwerfen. Wir sind so weit davon entfernt, alle Agentien der Natur und ihre verschiedenen Wirkungsarten zu kennen, daß es nicht sehr philosophisch seyn würde, deshalb allein Erscheinungen zu läugnen, weil sie bei dem jetzigen Zustande unserer Kenntnisse unerklärbar sind. Nur müssen wir sie mit um so sorgfältigerer Aufmerksamkeit prüfen, je schwieriger es scheint, sie zuzugeben; und hier wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung unentbehrlich, um zu bestimmen, bis zu welchem Punkte man die Beobachtungen oder Erfahrungen vervielfältigen muß, um zu Gunsten der von ihnen ange-

(*) Hierhin gehören auch die Erscheinungen bei der sogenannten Wünschelruthe. Denn die Entdeckung dabei vorgekommener Betrügereien beweißt nichts gegen die Möglichkeit, daß individuelle Beschaffenheit der Nerven wirklich solche Erscheinungen zur Folge haben kann.

zeigten Agentien eine Wahrscheinlichkeit zu erhalten, welche die sonstigen Gründe gegen deren Zulassung überwiege.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann dienen, um die Vortheile und Nachtheile der in den konjekturalischen Wissenschaften gebrauchten Methoden zu bestimmen. So reicht es hin, um die beste unter den gebräuchlichen Behandlungsarten bei der Heilung einer Krankheit kennen zu lernen, jede von ihnen an einer gleichen Anzahl von Kranken unter vollkommen ähnlichen Umständen zu versuchen; dann wird sich der Vorzug der vortheilhaftesten Behandlung um desto mehr zeigen, je größer die Anzahl ist, und durch Rechnung wird sich die entsprechende Wahrscheinlichkeit ihres Vortheils und des Verhältnisses, in welchem sie die andern übertrifft, darthun lassen.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die moralischen Wissenschaften.

Wir haben die Vortheile gesehen, welche die Analysis der Wahrscheinkeiten bei der Untersuchung der Gesetze von Naturerscheinungen darbietet, deren Ursachen unbekannt oder zu zu verwickelt sind, um ihre Wirkungen berechnen zu können. Letzteres ist der Fall mit beinahe allen Gegenständen der moralischen Wissenschaften. Es haben so viele unvorhergesehene, verborgene oder unbestimmbare Ursachen Einfluß auf die menschlichen Einrichtungen, daß es unmöglich ist, deren Resultate a priori zu bestimmen. Die Reihe der von der Zeit herbeigeführten Begebenheiten entwickelt jene Resultate und zeigt die Mittel an, den schädlichen abzuhelfen. Schon oft sind in dieser Hinsicht weise Gesetze gegeben worden; weil man aber die Beweggründe zu derselben aufzubewahren vernachlässigt hatte, so wurden mehrere wieder als unnütz ab-

geschafft, und ehe man sie wieder herstellte, mußten nachtheilige Erfahrungen deren Nothwendigkeit von neuem fühlen lassen. Es ist daher sehr wichtig, in jedem Zweige der öffentlichen Verwaltung ein genaues Register über die Wirkungen der verschiedenen Mittel zu führen, welche angewendet worden sind, und als eben so viele von den Regierungen im Großen gemachten Erfahrungen betrachtet werden können. Wir wollen die auf Beobachtung und Rechnung gegründete Methode, deren wir uns bei den Naturwissenschaften mit so gutem Erfolge bedient haben, auch einmal auf die politischen und moralischen Wissenschaften anwenden. Den unvermeidlichen Wirkungen des Fortschrittes der Aufklärung sollte man nicht unnützen und oft gefährlichen Widerstand entgegensetzen, aber auch nur mit äußerster Vorsicht unsere Einrichtungen und Gebräche umändern, an die wir uns seit so langer Zeit gewöhnt haben. Zwar können wir durch die Erfahrung des Vergangenen die Nachtheile, welche sie mit sich bringen; aber wir wissen nichts von der Größe der Uebel, welche ihre Veränderung hervorbringen kann.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist schon mit Glück auf mehrere Gegenstände der moralischen Wissenschaften angewendet worden. Die vorzüglichsten Resultate werde ich hier folgen lassen.

Von der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse.

Da sich die meisten unserer Urtheile auf die Wahrscheinlichkeit von Zeugnissen stützen, so ist es sehr wichtig, diese berechnen zu können. Dieß wird freilich zuweilen unmöglich, theils durch die Schwierigkeit, die Glaubwürdigkeit der Zeugen zu schätzen, theils durch die große Menge von Umständen, mit welchen die bezeugten Thatsachen verbunden

seyn können. Man kann aber in mehrern Fällen Aufgaben auflösen, welche den vorgelegten Fragen sehr analog sind und deren Auflösung gleichsam als Näherungen anzusehen sind, die uns leiten und vor den Irrthümern und Gefahren schützen können, welchen falsche Schlüsse uns aussetzen.

Wenn eine Näherung dieser Art gut ausgeführt wird, so ist sie den besonnensten Spekulationen immer vorzuziehen. Wir wollen daher versuchen, einige allgemeine Regeln zu geben, um dahin zu gelangen.

Gesetzt es sey eine einzige Nummer aus einer Urne gezogen worden, die deren tausend enthält. Ein Zeuge bei diesem Herausziehen kündigt an, daß Nummer 79 herausgekommen ist; man will die Wahrscheinlichkeit dieses Herauskommens wissen. Wir wollen annehmen, man wisse aus Erfahrung, daß der Zeuge Einmal unter zehn Malen lügt, so daß die Wahrscheinlichkeit seines Zeugnisses $9/10$ ist. Die beobachtete Begebenheit ist hier die Aussage des Zeugen, daß Numero 79 herausgekommen sey. Diese Begebenheit kann unter den beiden Voraussetzungen Statt finden, entweder, daß der Zeuge die Wahrheit sagt, oder, daß er lügt. Nach dem oben dargestellten Grundsatze über die Herleitung der Wahrscheinlichkeit der Ursachen aus den beobachteten Begebenheiten muß nun zuerst die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit unter jeder Voraussetzung a priori bestimmt werden. Unter der erstern ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge Numero 79 anzeigen werde, der Wahrscheinlichkeit des Herauskommens dieser Nummer selbst gleich, das heißt, $1/1000$. Multiplizirt man diese mit der Wahrscheinlichkeit $9/10$ der Glaubwürdigkeit des Zeugen, so erhält man $9/10000$ als die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit unter dieser Hypothese. Wenn der Zeuge lügt, so ist Numero 79 nicht

herausgekommen; und die Wahrscheinlichkeit dieses Falls ist $^{9}/_{1000}$. Um aber das Herauskommen gerade dieser Nummer anzuzeigen, muß sie der Zeuge unter den 999 nicht herausgekommenen Nummern auswählen; und da vorausgesetzt wird, daß er gar keinen Beweggrund habe, eine Nummer der andern vorzuziehen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß er Numero 79 auswählen werde, $^{1}/_{999}$; multiplizirt man also diese Wahrscheinlichkeit mit der vorhergehenden, so erhält man $^{1}/_{1000}$, das heißt, die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge Numero 79 unter der zweiten Voraussetzung angeben werde. Diese Wahrscheinlichkeit ist nun noch mit der Wahrscheinlichkeit $^{1}/_{10}$ der Voraussetzung selbst zu multipliziren, wodurch man die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit unter dieser Voraussetzung $^{1}/_{10000}$ erhält. Macht man jetzt einen Bruch, dessen Zähler die Wahrscheinlichkeit unter der ersten Voraussetzung und dessen Nenner die Summe der Wahrscheinlichkeit unter beiden Voraussetzungen ist, so erhält man nach dem sechsten Grundsatze die Wahrscheinlichkeit der erstern Voraussetzung, und diese wird $^{9}/_{10}$, das heißt, der Glaubwürdigkeit des Zeugen selbst gleich beim. Zugleich ist dieß auch die Wahrscheinlichkeit, daß Numero 79 wirklich herausgekommen sey. Die Wahrscheinlichkeit hingegen, daß der Zeuge lüge und die Nummer nicht herausgekommen sey, ist $^{1}/_{10}$.

Wenn der Zeuge betrügen wollte und dabei einiges Interesse hätte, Numero 79 unter den nicht herausgekommenen Nummern zu wählen, wenn er zum Beispiel glaubte, daß, da er auf diese Nummer eine beträchtliche Summe gesetzt hätte, seine Anzeige des Herauskommens derselben seinen Kredit vermehren würde, so ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß er diese Nummer wählen werde, nicht mehr, wie

vorher, $1/999$, sondern sie kann $1/2$, $1/3$ und jeder andere Bruch seyn, der größer ist, als $1/999$, je nachdem das Interesse des Zeugen beim Ansagen des Herauskommens der Nummer beschaffen ist. Setzt man die Wahrscheinlichkeit gleich $1/9$, so muß die Wahrscheinlichkeit $999/1000$ mit diesem Bruche multiplizirt werden, um unter der Voraussetzung der Lüge die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit zu erhalten, die dann noch mit $1/10$ zu multipliziren ist; dadurch ergibt sich die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit unter der zweiten Voraussetzung gleich $111/10000$. Dann reduzirt sich die Wahrscheinlichkeit der erstern Voraussetzung oder des Herauskommens von Numero 79, nach der vorhergehenden Regel, auf $9/120$. Sie wird also durch die Betrachtung des Interesses, welches der Zeuge dabei haben kann, das Herauskommen von Numero 79 anzusagen, sehr vermindert. Eigentlich aber vermehrt aber dasselbe Interesse auch die Wahrscheinlichkeit $9/10$, daß der Zeuge die Wahrheit sagen werde, wenn Numero 79 herauskommt. Dennoch aber kann diese Wahrscheinlichkeit nicht größer seyn, als Eins oder $10/10$; also ist die Wahrscheinlichkeit des Herauskommens von 79 nicht größer, als $10/121$. Der gesunde Menschenverstand sagt uns schon, daß ein solches vorausgesetztes Interesse Mißtrauen einflößen muß; allein die Rechnung lehrt dessen Einfluß schätzen.

Die Wahrscheinlichkeit a priori der von dem Zeugen genannten Nummer ist die Einheit, durch die Anzahl der Nummern der Urne dividirt; verwandelt sie sich, kraft des Zeugnisses, in die Glaubwürdigkeit des Zeugen, und kann also durch das Zeugniß vermindert werden. Enthält zum Beispiel die Urne nur zwei Nummern, wodurch die Wahr-

scheinlichkeit a priori des Herauskommens von Numero 1 gleich ½ wird, und setzt man die Glaubwürdigkeit eines Zeugen, der dieß ansagt, gleich $\frac{4}{10}$, so wird dadurch das Herausgekommenseyn weniger wahrscheinlich. Denn da der Zeuge dann mehr Neigung zur Lüge, als zur Wahrheit hat, so ist deutlich, daß sein Zeugniß die Wahrscheinlichkeit der bezeugten Sache jedesmal vermindern muß, wenn jene Wahrscheinlichkeit ½ oder größer, als ½ ist. Sind aber drei Nummern in der Urne, so vermehrt sich die Wahrscheinlichkeit a priori des Herauskommens von Numero 1 durch die Aussage eines Zeugen, dessen Glaubwürdigkeit ⅓ übertrifft.

Gesetzt, die Urne enthalte 999 schwarze Kugeln und eine weiße; es sey eine Kugel herausgezogen worden, und ein Augenzeuge des Zuges sage aus, die Kugel sey weiß. Die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit, unter der erstern Voraussetzung a priori bestimmt, wird hier, wie bei der vorhergehenden Aufgabe, $\frac{9}{10000}$ seyn. Aber unter der Voraussetzung, daß der Zeuge lügt, ist die weiße Kugel nicht herausgekommen, und die Wahrscheinlichkeit dieses Falles ist $\frac{999}{1000}$. Diese muß mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ der Lüge multiplizirt werden, wodurch sich die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit unter der zweiten Voraussetzung gleich $\frac{999}{10000}$ ergibt. Dieselbe Wahrscheinlichkeit war bei der vorhergehenden Aufgabe nur $\frac{1}{10000}$; der große Unterschied rührt daher, weil, wenn wirklich eine schwarze Kugel herausgekommen ist, der Zeuge, welcher lügen will, keine Wahl unter den 999 nicht herausgekommenen Kugeln zu treffen hat, um das Herausgekommenseyn einer weißen Kugel anzukündigen.

Bildet man nun zwei Brüche, deren Zähler die Wahrscheinlichkeiten unter jeder Voraussetzung und deren gemein-

schaftlicher Nenner die Summe der nämlichen Wahrscheinlichkeiten ist, so erhält man $^{9}/_{1008}$ für die Wahrscheinlichkeit der erstern Voraussetzung und des Herauskommens einer weißen Kugel und $^{999}/_{1008}$ für die Wahrscheinlichkeit der zweiten Voraussetzung und des Herauskommens einer schwarzen Kugel. Die letztere Wahrscheinlichkeit kommt der Gewißheit sehr nahe; sie würde sich ihr noch viel mehr nähern und $^{999999}/_{1000008}$ werden, wenn die Urne eine Million Kugeln und unter ihnen nur eine einzige weiße enthielte, da dann das Herauskommen einer weißen Kugel noch viel unwahrscheinlicher werden würde. Man sieht also, wie die Wahrscheinlichkeit der Lüge immer mehr wächst, je unwahrscheinlicher die bezeugte Sache wird.

Bisher ist vorausgesetzt worden, der Zeuge irre nicht; läßt man aber noch den Zufall hinzukommen, daß er auch irren könne, so wird nun die unwahrscheinliche Sache noch unwahrscheinlicher. Dann hat man, statt zweier Voraussetzungen, die vier folgenden: der Zeuge lügt nicht und irrt nicht; der Zeuge lügt nicht und irrt; der Zeuge lügt und irrt nicht; der Zeuge lügt und irrt. Wenn man nun unter jeder dieser Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit a priori bestimmt, so findet sich nach dem sechsten Grundsatze, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die bezeugte Sache falsch sey, einem Bruche gleich ist, dessen Zähler die Anzahl der schwarzen Kugeln der Urne ist, multiplizirt mit der Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß der Zeuge nicht lüge und irre, oder daß er lüge und nicht irre, und dessen Nenner der Zähler selbst ist, vermehrt um die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß der Zeuge nicht lüge und nicht irre, oder daß er zugleich lüge und irre. Daraus zeigt sich, daß, wenn die Anzahl der schwarzen Kugeln der

Urne sehr groß ist, wodurch das Herauskommen der weißen Kugel etwas Ungewöhnliches wird, die Wahrscheinlichkeit, daß die bezeugte Sache erlogen sey, der Gewißheit äußerst nahe kommt.

Dehnt man diese Folgerung auf alle ungewöhnlichen Begebenheiten aus, so ergibt sich, daß die Wahrscheinlichkeit des Irrthums oder der Lüge des Zeugen um so größer wird, je ungewöhnlicher die bezeugte Sache ist. Einige Schriftsteller haben das Gegentheil vorausgesetzt, wobei sie sich darauf stützen, daß der Anblick einer ungewöhnlichen Sache dem Anblicke einer gewöhnlichen vollkommen ähnlich sey und uns also dieselben Beweggründe leiten müssen, dem Zeugen eben so zu glauben, wenn er die eine, als wenn er die andere Sache behauptet. Schon der einfache Menschenverstand verwirft eine so sonderbare Meinung; und die Wahrscheinlichkeitsrechnung, das Urtheil des gesunden Verstandes bestätigend, lehrt ferner noch, die Unwahrscheinlichkeit der Zeugnisse nach der Ungewöhnlichkeit der behaupteten Begebenheiten zu bestimmen.

Diesem zufolge kann man sich zum Beispiel zwei gleich glaubwürdige Zeugen denken, von welchen der eine aussagt, er habe vor vierzehn Tagen einen Menschen todt gesehen, indeß der andere behauptet, denselben Menschen noch gestern in vollem Leben gesehen zu haben. Jede dieser Aussagen, für sich genommen, hat nichts Unwahrscheinliches. Die Wiederauflebung des Menschen würde eine Folge beider zusammen seyn; da aber die Zeugnisse nicht geradezu darauf führen, so kann das Ungewöhnliche jener Folgerung den Glauben nicht schwächen, welcher den Zeugnissen zukommt. (Man sehe auch die französische Encyclopédie unter dem Artikel Certitude.)

Wenn indessen die Folgerung aus der Zusammenstellung solcher Zeugnisse durchaus unmöglich ist, so ist eins derselben nothwendig falsch; nun ist eine unmögliche Folgerung die Gränze der ungewöhnlichen Folgerungen, so wie der Irrthum die Gränze der Unwahrscheinlichkeiten ist; also muß der Werth der Zeugnisse, welcher in dem Falle einer unmöglichen Folgerung Null wird, in dem Falle einer ungewöhnlichen Folgerung vermindert werden. Dieß bestätigt die Wahrscheinlichkeitsrechnung auch wirklich.

Um dieß zu zeigen, wollen wir zwei Urnen A und B betrachten, von denen die erstere eine Million weiße und die zweite eine Million schwarze Kugeln enthalte. Man ziehe aus einer dieser Urnen eine Kugel und lege diese hierauf in die andere Urne, aus welcher man dann ebenfalls eine Kugel ziehe. Zwei Zeugen, von denen der eine bei dem ersten, der andere bei dem zweiten Zuge zugegen war, sagen aus, die Kugel, welche sie hätten herausziehen sehen, sey weiß gewesen. Jedes Zeugniß, für sich genommen, hat nichts Unwahrscheinliches; und es ist leicht einzusehen, daß die Wahrscheinlichkeit der bezeugten Sache der Glaubwürdigkeit des Zeugen selbst gleich ist. Aber aus der Zusammenstellung der Zeugnisse folgt, daß beim ersten Zuge aus der Urne A eine weiße Kugel zum Vorschein kam, diese hierauf in die Urne B gelegt und diese gerade auch wieder beim zweiten Zuge herausgezogen wurde, was sehr unwahrscheinlich ist; denn da nun die zweite Urne eine weiße und eine Million schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, die weiße Kugel herauszuziehen, $1/1000001$. Um die Verminderung zu bestimmen, welche die Wahrscheinlichkeit der von beiden Zeugen behaupteten Sache dadurch erleidet, wollen

wir bemerken, daß die beobachtete Begebenheit hier die Aussage jedes von beiden ist, daß die Kugel, die er herausziehen sah, weiß gewesen sey. Gesetzt nun, die Wahrscheinlichkeit, daß er die Wahrheit sage, sey $\frac{9}{10}$, welches in gegenwärtigen Falle Statt finden kann, wenn der Zeuge nicht lügt und nicht irrt, und wenn er zugleich lügt und irrt. Dann lassen sich folgende vier Voraussetzungen machen.

1. Der erstere und der zweite Zeuge sagen die Wahrheit. Wenn dieß ist, so wurde zuerst eine weiße Kugel aus der Urne A gezogen, und die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit ist $\frac{1}{2}$, da die beim erstern Zuge herausgekommene Kugel eben so gut aus der erstern, als aus der zweiten Urne herausgezogen seyn konnte. Ferner kam die herausgezogene und in die Urne B gelegte Kugel beim zweiten Zuge wieder hervor; die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit ist $\frac{1}{1000001}$; also ist die Wahrscheinlichkeit der behaupteten Sache $\frac{1}{2000002}$. Multiplizirt man diese mit dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten $\frac{9}{10}$ und $\frac{9}{10}$, daß die Zeugen die Wahrheit sagen, so erhält man $\frac{81}{200000200}$ für die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit unter dieser ersten Voraussetzung.

2. Der erstere Zeuge sagt die Wahrheit, und der zweite sagt sie nicht, sey es, daß er lüge und nicht irre, oder daß er nicht lüge und irre. Dann ist beim ersten Zuge eine weiße Kugel aus der Urne A gezogen worden, und die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit ist $\frac{1}{2}$. Darauf, als sie in die Urne B gelegt worden war, ist aus dieser eine schwarze Kugel herausgekommen; die Wahrscheinlichkeit dieses Herauskommens ist $\frac{1000000}{1000001}$; man erhält also $\frac{1000000}{2000002}$ für die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Begebenheit. Wenn man nun diese mit dem Produkte der beiden Wahrscheinlichkeiten $\frac{9}{10}$ und $\frac{1}{10}$, daß der erstere Zeuge die

Wahrheit sage, und daß der zweite sie nicht sage, multiplizirt, so ergibt sich $^{9000000}/_{200000200}$ oder $^{90000}/_{2000002}$ für die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit unter der zweiten Voraussetzung.

3. Der erstere Zeuge sagt die Wahrheit nicht, der zweite aber sagt sie. Dann ist beim erstern Zuge aus der Urne B eine schwarze Kugel herausgezogen worden, und nachdem sie in die Urn. A gelegt worden war, ist aus dieser eine weiße Kugel hervorgekommen. Die Wahrscheinlichkeit der erstern dieser Begebenheiten ist $^{1}/_{2}$ und der zweiten $^{1000000}/_{1000001}$; also ist die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Begebenheit $^{1000000}/_{2000002}$. Diese, mit dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten $^{1}/_{10}$ und $^{9}/_{10}$, daß der erstere Zeuge die Wahrheit nicht sage, und daß der zweite sie sage, multiplizirt, gibt wieder $^{9000000}/_{200000200}$ oder $^{90000}/_{2000002}$ für die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit unter dieser Voraussetzung.

4. Alle beide Zeugen lügen. Dann ist beim erstern Zuge aus der Urne B eine schwarze Kugel herausgezogen worden und ist darauf, als sie in die Urne A gelegt worden war, beim zweiten Zuge wieder zum Vorschein gekommen; die Wahrscheinlichkeit dieser zusammengesetzten Begebenheit ist $^{1}/_{2000002}$. Wird nun diese mit dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten $^{1}/_{10}$ und $^{1}/_{10}$, daß jeder Zeuge lüge, multiplizirt, so kommt $^{1}/_{200000200}$ als die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit unter dieser Voraussetzung.

Um nun die Wahrscheinlichkeit der von beiden Zeugen ausgesagten Sache zu erhalten, nämlich, daß eine weiße Kugel bei jedem Zuge herausgekommen sey, muß man die der ersten Voraussetzung entsprechende Wahrscheinlichkeit durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter allen vier Vor-

ausſetzungen dividiren; und ſo erhält man für dieſe Wahrſcheinlichkeit den äußerſt kleinen Bruch $^{81}/_{18000082}$.

Wenn der erſtere der beiden Zeugen behauptete, es wäre aus einer der beiden Urnen A und B eine weiße Kugel herausgekommen, und der zweite, es wäre ebenfalls aus einer der beiden Urnen A′ und B′, die jenen vollkommen ähnlich ſeyn mögen, eine weiße Kugel herausgezogen worden, ſo wäre die Wahrſcheinlichkeit der von beiden Zeugen ausgeſagten Sache das Produkt der Wahrſcheinlichkeiten ihrer Zeugniſſe oder $^{81}/_{100}$ alſo mehr, als hundert achtzig tauſend mal ſo groß, wie die vorhergehende. Daraus ſieht man, wie ſehr im erſtern Falle die Wiedererſcheinung der im erſtern Zuge herausgekommenen weißen Kugel beim zweiten Zuge, welche Folgerung aus beiden Zeugniſſen höchſt ungewöhnlich iſt, deren Glaubwürdigkeit vermindert.

Wir würden dem Zeugniſſe eines Menſchen nicht glauben, der uns ſagte, er hätte hundert Würfel in die Luft geworfen, und alle hundert wären auf dieſelbe Seite gefallen. Wären wir ſelbſt Zuſchauer der Begebenheit geweſen, ſo würden wir ſelbſt unſern eigenen Augen nicht eher trauen, bis wir alle Umſtände dabei ſorgfältig unterſucht hätten, um ganz ſicher zu ſeyn, daß kein Betrug dabei vorgefallen ſey.

Nach einer ſolchen Unterſuchung würden wir aber nicht anſtehen, die Sache ungeachtet ihrer außerordentlichen Unwahrſcheinlichkeit zuzugeben; und niemand würde darauf fallen, zu der Erklärung derſelben eine durch eine Veränderung der Geſetze des Sehens hervorgebrachte Täuſchung vorauszuſetzen. Daraus folgt, daß die Wahrſcheinlichkeit der Beſtändigkeit der Naturgeſetze für uns größer iſt, als die Wahrſcheinlichkeit, daß die genannte Begebenheit nicht Statt finde; welche letztere Wahrſcheinlichkeit ſelbſt wieder

größer ist, als die Wahrscheinlichkeit der meisten historischen Begebenheiten, welche wir für ausgemacht halten. Hiernach läßt sich beurtheilen, welch' unermeßliches Gewicht von Zeugnissen erforderlich wäre, um einer Aufhebung der Naturgesetze zuzugeben, und wie sehr man irren würde, wenn man in diesem Falle die gewöhnlichen Regeln der Kritik anwendete. Alle diejenigen, welche, ohne eine unermeßliche Menge von Zeugnissen beizubringen, das, was sie vorgeben, durch Erzählungen von Begebenheiten unterstützen, die den Naturgesetzen entgegen sind, vermindern den Glauben, den sie einzuflößen suchen, statt ihn zu vermehren; denn dann machen es solche Erzählungen sehr wahrscheinlich, daß die Erzähler irren oder lügen. Allein gerade das, was den Glauben aufgeklärter Männer vermindert, vermehrt oft den Glauben des Volks; wovon wir den Grund oben angegeben haben.

Es gibt so ungewöhnliche Erzählungen, daß nichts ihrer Unwahrscheinlichkeit gleich kommen kann. Diese kann aber, durch die Wirkung einer herrschenden Meinung, so sehr geschwächt werden, daß sie geringer erscheint, als die Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse; und wenn sich die Meinung ändert, so gibt eine ungereimte Erzählung, die in dem Jahrhundert, in welchem sie entstand, einstimmig geglaubt wurde, den folgenden Jahrhunderten nur einen neuen Beweis von dem außerordentlichen Einflusse der öffentlichen Meinung auf die aufgeklärtesten Geister. Zwei große Männer aus dem Jahrhundert Ludwigs des Vierzehnten, Racine und Pascal, sind auffallende Beispiele davon. Es betrübt, wenn man sieht, mit wie viel Leichtgläubigkeit Racine, der bewundernswürdige Zeichner des menschlichen Herzens und einer der vollkommensten Dichter, als ein Wunder die

Heilung der jungen Perrier, Pascal's Nichte, erzählt, die in der Abtei von Portroyal erzogen wurde; es kostet Ueberwindung, die Vernünfteleien zu lesen, durch welche Pascal zu beweisen sucht, daß jenes Wunder der Religion nöthig wurde, um die Lehre der damals von den Jesuiten verfolgten Nonnen der Abtei zu rechtfertigen. Seit viertehalb Jahren war die junge Perrier an einer Thränenfistel erkrankt; sie berührte mit dem kranken Auge eine Reliquie, die für einen Dorn aus der Krone des Erlösers gehalten wurde, und augenblicklich glaubte sie, geheilt zu seyn. Einige Tage nachher bestätigten Aerzte und Wundärzte die Heilung und behaupteten, Natur und Arzneimittel hätten keinen Theil daran gehabt. Da diese im Jahre 1656 vorgefallene Begebenheit großes Aufsehen machte, „begab „sich, so erzählt Racine, ganz Paris nach Portroyal. „Die Menge wuchs von Tage zu Tage, und Gott selbst „schien Vergnügen daran zu haben, die Andacht der Völker „durch die Menge von Wundern, die in jener Kirche ge„schahen, zu rechtfertigen.“ In diesem Zeitalter schienen Wunder und Weissagungen noch nicht unwahrscheinlich; und man zögerte nicht, ihnen die Sonderbarkeiten in der Natur zuzuschreiben, welche man anders nicht erklären konnte.

Diese Ansicht ungewöhnlicher Ereignisse findet sich in den merkwürdigsten Werken des Zeitalters Ludwig's des Vierzehnten, selbst in dem Versuch über den menschlichen Verstand von Locke, wo dieser weise Mann von den verschiedenen Graden der Glaubwürdigkeit handelt und sagt: „Ob gleich die gemeine Erfahrung und der gewöhn„liche Lauf der Dinge mit Recht einen großen Einfluß auf „den menschlichen Geist haben, der ihn leitet, wenn er einer „Sache, die geglaubt werden soll, seine Zustimmung gibt,

„oder sie verwirft, so ist dennoch ein Fall denkbar, wo das „Sonderbare an einer Begebenheit den Glauben nicht „schwächen darf, den wir dem aufrichtigen Zeugnisse geben „müssen, auf welche sie sich stützt. Wenn übernatürliche „Begebenheiten den Absichten dessen entsprechen, der den „Lauf der Natur zu jeder Zeit und unter allen Umständen „zu ändern vermag, so können sie nun so geeigneter seyn, „Glauben in unsern Gemüthern zu finden, je mehr sie über „die gewöhnlichen Beobachtungen hinausgehen oder selbst, „je mehr sie diesen widersprechen." Da die wahren Grundsätze der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse so sehr von Philosophen verkannt wurden, denen vorzüglich die Vernunft ihre Forschritte verdankt, so glaubte ich, die Resultate der Rechnung über diesen wichtigen Gegenstand hier ausführlich darstellen zu müssen.

Hier bietet sich von selbst die Untersuchung eines berühmten Schlusses von Pascal dar, den der englische Mathematiker Craig unter einer geometrischen Form wieder vorgebracht hat. Zeugen sagen aus, die Gottheit selbst habe ihnen offenbart, daß, wenn man sich so oder so aufführe, man nicht eins, oder zwei, sondern unendlich viele Jahrhunderte der Glückseligkeit erleben werde. Wie gering nun auch die Wahrscheinlichkeit solcher Zeugnisse seyn mag, wenn sie nur nicht unendlich klein ist, so erhellt, daß diejenigen, welche sich nach dem Vorgeschriebenen richten, einen unendlichen Vortheil erlangen, da dieser das Produkt aus jener Wahrscheinlichkeit in ein unendlich großes Gut ist; folglich muß man nicht anstehn, sich den Vortheil zu verschaffen.

Dieser Schluß gründet sich auf die unendliche Anzahl der von den Zeugen im Namen der Gottheit versproche-

nen glückseligen Jahrhunderte; man müßte also ihren Vorschriften gerade deshalb folgen, weil sie ihre Versprechungen über alle Gränzen hinaus vergrößern, welche Folgerungen dem gesunden Verstande widerspricht. Auch zeigt die Rechnung, daß eben diese Vergrößerung die Wahrscheinlichkeit ihres Zeugnisses so sehr verringert, daß sie unendlich klein oder Null wird. Eigentlich ist es eben so, als wenn ein Zeuge aussagte, es sey aus einer mit sehr vielen Nummern angefüllten Urne, aus welcher eine einzige herausgezogen worden ist, die höchste Nummer herausgekommen, und der Zeuge hätte zugleich ein großes Interesse dabei, das Herauskommen dieser Nummer auszusagen. Wir haben oben gesehen, wie sehr ein solches Interesse sein Zeugniß unwahrscheinlich macht. Nimmt man an, es sey die Wahrscheinlichkeit, daß der Zeuge, wenn er lügt, die höchste Nummer wählen werde, auch nur ½, so ergibt sich durch Rechnung, daß dann die Wahrscheinlichkeit seiner Aussagen kleiner ist, als ein Bruch, dessen Zähler Eins und dessen Nenner die um Eins vermehrte Hälfte des Produkts aus der Anzahl der Nummern in die a priori oder unabhängig von der Aussage betrachtete Wahrscheinlichkeit der Lüge ist. Um diesen Fall auf den Gegenstand von Pascal's Schluß anzuwenden, braucht man sich nur unter den Nummern der Urne alle möglichen Anzahlen von glückseligen Jahrhunderten zu denken, so daß die Anzahl jener Nummern unendlich groß wird, und zu bemerken, daß, wenn die Zeugen betrügen, sie, um ihrer Lüge Glauben zu verschaffen, das größte Interesse haben, eine ewige Glückseligkeit zu versprechen. Dann wird der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit ihres Zeugnisses unendlich klein. Multiplizirt man ihn nun mit der unendlichen Anzahl der versprochenen glückseligen Jahr-

hunderte, so verschwindet das Unendliche aus dem Produkte, welches den aus jenem Versprechen entspringenden Vortheil ausdrückt; und dadurch fällt Pascal's Schluß von selbst weg.

Jetzt wollen wir die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Zeugnisse über eine bestimmte Sache betrachten. Zur Vereinfachung wollen wir setzen, es sey aus einer Urne, die hundert Nummern enthält, eine einzige herausgezogen worden. Zwei Zeugen der Ziehung sagen aus, Numero 1 sey herausgekommen; man soll die aus diesen beiden Zeugnissen hervorgehende Wahrscheinlichkeit der Sache bestimmen. Hier lassen sich zwei Voraussetzungen machen; entweder sagen die Zeugen die Wahrheit, oder sie lügen. Unter der erstern Voraussetzung ist Numero 1 wirklich herausgekommen; die Wahrscheinlichkeit, daß dieß geschehe, ist $\frac{1}{100}$. Diese muß nun mit dem Produkte der Glaubwürdigkeiten der Zeugen multiplizirt werden, welche wir zu $\frac{9}{10}$ und $\frac{7}{10}$ annehmen wollen; dadurch wird die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit, unter dieser Voraussetzung, $\frac{63}{10000}$. Unter der zweiten Voraussetzung ist Numero 1 nicht herausgekommen, und die Wahrscheinlichkeit hiervon ist $\frac{99}{100}$. Dann erfordert aber die Uebereinstimmung der Zeugen, daß sie, indem sie zu betrügen suchten, unter den 99 nicht herausgekommenen Nummern alle beide gerade Numero 1 auswählten; die Wahrscheinlichkeit dieser Wahl ist das Quadrat des Bruches $\frac{1}{99}$; nun müssen diese beide Wahrscheinlichkeiten mit einander und ihr Produkt mit dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{10}$ und $\frac{3}{10}$, daß die Zeugen lügen, multiplizirt werden; so findet sich $\frac{1}{330000}$ für die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Begebenheit, unter der zweiten Voraussetzung. Hieraus erhält

man die Wahrscheinlichkeit der bezeugten Erscheinung, daß Numero 1 herausgekommen sey, wenn man die Wahrscheinlichkeit unter der erstern Voraussetzung durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten unter beiden Voraussetzungen dividirt; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $^{2079}/_{2080}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß die Nummer nicht herausgekommen sey und die Zeugen lügen, $^{1}/_{2080}$.

Wenn die Urne nur die Nummern 1 und 2 enthielte, so fände man auf dieselbe Weise $^{21}/_{22}$ als die Wahrscheinlichkeit, daß Numero 1 herausgekommen sey, und folglich wäre die Wahrscheinlichkeit, daß die Zeugen lügen, hier $^{1}/_{22}$, wenigstens vier und neunzig mal so groß, wie vorher. Daraus sieht man, wie sehr die Wahrscheinlichkeit, daß die Zeugen lügen, abnimmt, wenn die bezeugte Sache an sich unwahrscheinlicher wird. Denn es ist leicht einzusehen, daß dann die Uebereinstimmung der Zeugen, wenn sie lügen, schwieriger wird, vorausgesetzt, daß sie nicht einverstanden sind; und wir nehmen an, daß dieß nicht Statt finde.

Im vorhergehenden Falle, wo die Urne nur zwei Nummern enthält und die Wahrscheinlichkeit der bezeugten Sache a priori ½ ist, ist die aus den Zeugnissen hervorgehende Wahrscheinlichkeit das Produkt der Glaubwürdigkeiten der Zeugen, dividirt durch die Summe desselben Produkts und des Produkts der gegenseitigen Wahrscheinlichkeiten ihrer Lüge.

Nun bleibt uns noch der Einfluß der Zeit auf die Wahrscheinlichkeit der durch eine überliefernde Reihe von Zeugen fortgepflanzten Sagen zu betrachten übrig. Je größer die Reihe wird, um desto mehr muß sich natürlich die Wahrscheinlichkeit vermindern. Hat die Sache an sich keine Wahrscheinlichkeit, so nimmt die Wahrscheinlichkeit,

welche sie durch die Zeugnisse bekommt, nach dem fortgesetzten Produkte der Glaubwürdigkeit der Zeugen ab.

Wenn aber die Sache an sich eine Wahrscheinlichkeit hat, wenn sie zum Beispiel in dem Herauskommen von Numero Eins aus einer Urne, die eine endliche Anzahl von Nummern enthält, und aus welcher wirklich Eine Nummer herausgezogen worden ist, besteht; so nimmt das, was die überliefernde Reihe von Zeugen dieser Wahrscheinlichkeit zusetzt nach einem fortgesetzten Produkte ab, in welchem der erste Faktor das Verhältniß der Anzahl von Nummern der Urne, weniger Eins, zu dieser Anzahl ist, und in welchem man jeden folgenden Faktor erhält, wenn man die Glaubwürdigkeit jedes Zeugen um das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit seiner Lüge zu der Anzahl Nummern der Urne, weniger Eins vermindert, so, daß die Gränze der Wahrscheinlichkeit der Sache die Wahrscheinlichkeit der a priori oder unabhängig von den Zeugnissen betrachteten Sache ist, nämlich die Einheit, dividirt durch die Anzahl Nummern der Urne.

Also vermindert die Wirkung der Zeit unaufhörlich die Wahrscheinlichkeit der geschichtlichen Begebenheiten, wie sie die dauerhaftesten Denkmale zerstört. Diese Wirkung kann zwar durch Vervielfältigung und Bewahrung der Zeugnisse und Denkmale, welche die Begebenheiten bestätigen, aufgehalten werden, wozu die Buchdruckerkunst eins der besten, den Alten unglücklicher Weise nicht bekannten Mittel darbietet. Aber ungeachtet der unendlichen Vortheile, welche sie uns verschafft, werden endlich doch die physischen und moralischen Umwälzungen, durch welche die Oberfläche der Erde stets verändert wird, in Verbindung mit der unvermeidlichen Wirkung der Zeit, nach Tausenden von Jahren

die geschichtlichen Begebenheiten zweifelhaft machen, die heutzutage ganz gewiß sind.

Craig versuchte es, die allmählige Verminderung der Glaubwürdigkeit der christlichen Religion zu berechnen, und fand unter der Voraussetzung, daß die Welt dann untergehen werde, wann die christliche Religion nicht mehr wahrscheinlich ist, daß das Ende der Welt 1454 Jahre nach dem Zeitpunkte, da er schrieb, eintreten wird. Seine Analysis ist aber eben so falsch, als seine Voraussetzung über die Dauer der Welt ungereimt.

Ueber Wahlen und Entscheidungen der Versammlungen.

Die Wahrscheinlichkeit der Entscheidungen einer Versammlung hangt von der Mehrheit der Stimmen, den Einsichten und der Unpartheilichkeit der Mitglieder derselben ab. Dabei äußern aber eine Menge Leidenschaften und Privatinteresse so häufig ihren Einfluß, daß es unmöglich bleibt, diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Doch gibt der gesunde Verstand einige allgemeine Resultate an die Hand, und die Rechnung bestätigt sie auch. Wenn, zum Beispiel, die Versammlung über den ihrer Entscheidung unterworfenen Gegenstand nicht recht aufgeklärt ist, wenn der Gegenstand an sich zarte Untersuchungen erfordert, oder wenn die Wahrheit gerade in diesem Falle allgemein verbreiteten Vorurtheilen entgegen ist, so daß mehr, als Eins gegen Eins zu wetten ist, daß sich jeder Stimmende davon entfernen werde, dann ist die Entscheidung der Mehrzahl wahrscheinlich falsch, und die Furcht, daß sie es seyn werde, hat um so mehr Grund, je zahlreicher die Versammlung ist. Es muß also dem gemeinen Wesen daran gelegen seyn, daß

Versammlungen nur über den meisten faßliche Gegenstände zu entscheiden haben; es muß dem Staate daran liegen, daß die Aufklärung allgemein verbreitet werde, und daß gute, auf Vernunft und Erfahrung gegründete Werke diejenigen belehren, die dazu berufen sind, das Schicksal ihres Gleichen zu entscheiden oder sie zu regieren, und sie im Voraus vor falschen Ansichten und Vorurtheilen der Unwissenheit schüzzen. Gelehrte haben häufig Gelegenheit, zu bemerken, daß die ersten Ansichten oft täuschend sind, und das Wahre nicht immer auch wahrscheinlich ist.

Mitten unter den verschiedenen Meinungen der Mitglieder ist es schwer, den Wunsch einer Versammlung kennen zu lernen, sogar nur, ihn ungefähr zu bestimmen. Ich will versuchen, einige Regeln darüber zu geben, indem ich die beiden gewöhnlichsten Fälle betrachte, die Wahl zwischen mehrern Kandidaten und zwischen mehrern Vorschlägen über denselben Gegenstand.

Wenn eine Versammlung unter mehrern Kandidaten wählen soll, die sich um Eine oder mehrere Stellen derselben Art bewerben, so scheint es am einfachsten zu seyn, jeden Stimmenden die Namen aller Kandidaten, nach der Ordnung des Verdienstes, welches er ihnen beilegt, auf einen Zettel schreiben zu lassen. Vorausgesetzt, daß jeder sie nach seiner Ueberzeugung ordnet, so werden sich durch die Ansicht der Zettel die Resultate der Wahlen ergeben, wie auch die Kandidaten unter einander verglichen seyn mögen; so, daß neue Wahlen nichts weiter in dieser Hinsicht darthun können. Nun kommt es darauf an, daraus die Ordnung des Vorzuges herzuleiten, welche die Zettel unter den Kandidaten aufstellen. Wir wollen uns denken, man gäbe jedem Wähler eine Urne, die unendliche viele Kugeln ent-

hielte, vermittelst welcher er alle Grade des Verdienstes der Kandidaten nach einander angeben kann; gesetzt nun, er zöge aus seiner Urne eine Anzahl von Kugeln, die dem Verdienste jedes Kandidaten proportional sey, und schriebe diese Anzahl auf einen Zettel, neben den Namen des Kandidaten. Wenn man nun alle Zahlen, die neben dem Namen desselben Kandidaten auf jedem Zettel stehend, zu einander addirt, so wird natürlich derjenige unter den Kandidaten, welcher die größte Summe hat, von der Versammlung vorgezogen; und überhaupt wird die Ordnung des Vorzugs der Kandidaten die Ordnung der Summen der neben dem Namen jedes Kandidaten stehenden Zahlen seyn. Aber die Zettel bezeichnen nicht die Anzahl der Kugeln, welche jeder Wähler den Kandidaten zutheilen würde: sie zeigen nur an, daß der erste deren mehr, als der zweite, der zweite mehr, als der dritte, und so fort, haben würde. Nimmt man an, der erste auf einem gegebenen Zettel habe irgend eine Anzahl von Kugeln, so sind alle Kombinationen kleinerer Zahlen, welche die genannten Bedingungen erfüllen, gleich zuläßig; und man erhält die Anzahl von Kugeln in Beziehung auf jeden Kandidaten, wenn man alle Zahlen addirt, die ihm jede Kombination gibt, und die erhaltene Summe durch die Anzahl aller Kombinationen dividirt. Eine sehr einfache Analysis zeigt, daß die Zahlen, welche man so auf jeden Zettel neben den letzten Namen, den vorletzten, und so weiter schreiben muß, den Gliedern der arithmetischen Progression 1, 2, 3, und so fort proportional sind. Schreibt man also auf jeden Zettel die Glieder dieser Reihe und zählt die jedem Kandidaten zugehörenden Zahlen auf den Zettel zusammen, so zeigen die verschiedenen Summen nach ihrer Größe die Ordnung des Vorzugs an, die unter den Kandidaten angenommen wer-

den muß. Dieß ist die Art der Wahl, welche die Theorie der Wahrscheinlichkeit angibt. Sie würde ohne Zweifel die beßte seyn, wenn jeder Wähler die Namen der Kandidaten wirklich in der Ordnung des Verdienstes, welches er ihnen beilegt, auf seinen Zettel schriebe. Aber Privatinteresse und viele dem Verdienste fremde Rücksichten müssen diese Ordnung stören und zuweilen hervorbringen, daß der Kandidat zuletzt gestellt wird, welcher demjenigen, den man vorzieht, den meisten Eintrag thut; und dadurch erhalten die Kandidaten von mittelmäßigem Verdienste zuviel Vortheil. Auch hat die Erfahrung bewirkt, daß diese Art der Wahl von den Gesellschaften, welche sie angenommen hatten, wieder abgeschafft wurde.

Die Wahl nach absoluter Stimmenmehrheit verbindet mit der Gewißheit, daß kein Kandidat zugelassen werden wird, den die Mehrzahl verwirft, den Vortheil, am häufigsten den Wunsch der ganzen Versammlung auszudrücken. Sie fällt immer mit der vorigen Art zusammen, wenn nur zwei Kandidaten da sind. Freilich ist sie wieder mit der Unannehmlichkeit verbunden, daß zuweilen die Wahlen nicht zu Ende kommen. Aber die Erfahrung hat gelehrt, daß diese Unbequemlichkeit bald verschwindet, und daß der allgemeine Wunsch, den Wahlen ein Ende zu machen, in kurzer Zeit die Mehrheit der Stimmen über einen der Kandidaten vereinigt.

Die Wahl zwischen mehrern Vorschlägen über denselben Gegenstand scheint denselben Regeln unterworfen seyn zu müssen, wie die Wahl zwischen mehrern Kandidaten. Aber beide sind dadurch von einander verschieden, daß das Verdienst eines Kandidaten nicht das Verdienst seiner Mitbewerber ausschließt; da hingegen, wenn die Vorschläge, un-

ter welchen gewählt werden soll, einander widersprechen, die Wahrheit des einen jedesmal die Wahrheit aller andern ausschließt. Dann muß die Frage so angesehen werden.

Man gebe jedem Stimmenden eine Urne, die eine unendliche Menge von Kugeln enthalte, und nehme an, er vertheile sie auf die verschiedenen Vorschläge nach Verhältniß der gegenseitigen Wahrscheinlichkeiten, welche er ihnen zuschreibt. Natürlich wird nun der Stimmende, da die ganze Anzahl der Kugeln die Gewißheit bezeichnet und er nach der Voraussetzung überzeugt seyn soll, daß einer von den Vorschlägen der richtige ist, alle Kugeln auf die Sätze vertheilen. So reduzirt sich also die Aufgabe darauf, die Kombination zu bestimmen, in denen die Kugeln so vertheilt seyn werden, daß der erste Vorschlag auf dem Zettel mehr Kugeln hat, als der zweite, der zweite mehr als dritte, und so weiter; dann alle Anzahlen von Kugeln von jedem Vorschlage in den verschiedenen Kombinationen zu addiren und diese Summe durch die Anzahl der Kombinationen zu dividiren; die hierdurch erhaltenen Quotienten werden die Anzahlen von Kugeln seyn, welche man den Vorschlägen auf irgend einem Zettel beizuschreiben hat. Durch die Analysis findet sich, daß, wenn man von dem letzten Vorschlage anfängt und so rückwärts bis zum ersten fortgeht, jene Quotienten sich unter einander verhalten, wie folgende Größen: 1) die Einheit, dividirt durch die Anzahl der Vorschläge; 2) die vorige Größe, vermehrt um die durch die Anzahl der Vorschläge, weniger Eins, dividirte Einheit; 3) diese zweite Größe, vermehrt um die durch die Anzahl der Vorschläge, weniger Zwei, dividirte Einheit, und so fort. Man schreibt also diese Größen auf jedem Zettel neben die Vorschläge, zu denen sie gehören; und wenn man nun die auf

den verschiedenen Zetteln neben jedem Vorschlage stehenden Größen zu einander addirt, so zeigen die Summen nach ihrer Größe die Ordnung des Vorzuges an, welche die Versammlung den Vorschlägen beilegt.

Hier noch ein Wort über die Weise, wie die Versammlungen, deren Mitglieder gewählt werden, und in einer bestimmten Anzahl von Jahren alle ihre Stellen an andere abtreten müssen, zu erneuern seyn. Muß eine solche Erneuerung auf Einmal vor sich gehen, oder ist es besser, sie auf die Jahre zu vertheilen? Bei dem letztern Verfahren würde die Versammlung unter dem Einflusse der verschiedenen während des Zeitraums ihrer Erneuerung herrschenden Meinung gebildet, der darin verbreitete Geist würde dann also sehr wahrscheinlich das Mittel aus allen jenen Meinungen seyn. So würde die Versammlung von der Zeit denselben Vortheil enthalten, welchen ihr die Ausdehnung der Wahlen ihrer Mitglieder auf alle Theile des Landes verschafft, welches sie vertritt. Bedenkt man ferner, was die Erfahrung nur zu sehr gelehrt hat, daß bei Wahlen die herrschenden Meinungen den heftigsten Einfluß haben, so wird man leicht einsehen, wie nützlich es ist, diese Meinungen vermittelst einer allmähligen Erneuerung durch sich selbst zu mäßigen.

Von der Wahrscheinlichkeit gerichtlicher Urtheile.

Die Analysis bestätigt, was der gesunde Verstand schon sagt, daß die Richtigkeit der Urtheile um so wahrscheinlicher ist, je zahlreicher und aufgeklärter die Richter sind. Es ist also sehr wichtig, daß diese Bedingungen bei Gerichtshöfen Statt finden. Besonders sollte dieß der Fall bei Appel-

lationsgerichtshöfen seyn; die Gerichtshöfe der ersten Instanz, die den Betheiligten näher sind, verschaffen ihnen schon den Vortheil eines ersten bereits wahrscheinlichen Urtheils, mit welchen sie sich oft begnügen, indem sie sich entweder verständigen, oder ihre Ansprüche ganz aufgeben. Wenn aber die Ungewißheit des Gegenstandes der Klage und seine Wichtigkeit einen Kläger dazu bestimmen, seine Zuflucht zu dem Appellationsgerichtshofe zu nehmen, so muß hier für ihn die Wahrscheinlichkeit größer seyn, ein billiges Urtheil zu erhalten, und er muß darin mehr Sicherheit für sein Vermögen und den Ersatz aller Händel und Kosten finden, die ein neuer Prozeß mit sich bringt. Dieß war bei der Einrichtug des gegenseitigen Appels der Departementalgerichtshöfe in Frankreich nicht der Fall, wodurch diese Einrichtung dem Interesse der Bürger sehr nachtheilig wurde. Vielleicht wäre es dienlich und der Wahrscheinlichkeitsrechnung angemessen, wenn bei einem Appellationsgerichte eine Mehrheit von wenigstens zwei Stimmen erfordert würde, um den Ausspruch des untern Gerichtshofes außer Kraft zu setzen.

Wir wollen noch besonders die Urtheile bei Kriminalfällen betrachten.

Ohne Zweifel müssen die Richter, um einen Angeklagten zum Tode zu verurtheilen, die stärksten Beweise seines Verbrechens haben. Aber ein moralischer Beweis ist immer nur eine Wahrscheinlichkeit; und die Erfahrung hat nur nur zu oft gezeigt, wie selbst bei den Kriminalurtheilen, welche die gerechtesten zu seyn schienen, noch Irrthümer vorkommen können. Die Unmöglichkeit, solche einmal begangene Irrthümer ungeschehen zu machen, ist der stärkste Grund für die Philosophen, welche die Todesstrafe abge-

schafft wissen wollen. Wir müßten uns also des Richtens ganz enthalten, wenn dabei bis auf mathematische Evidenz zu warten wäre. Aber wenn die Beweise eine solche Kraft haben, daß das Produkt aus dem zu befürchtenden Irrthume in dessen geringe Wahrscheinlichkeit kleiner ist, als die Gefahr, welche aus der Ungestraftheit des Verbrechens entspringen würde, so wird der Urtheilsspruch um des Wohls der Gesellschaft willen erforderlich. Dieses Urtheil reduzirt sich, wenn ich nicht irre, auf die Beantwortung folgender Frage: Hat der Beweis des Verbrechens des Angeklagten einen so hohen Grad von Wahrscheinlichkeit, daß die Bürger den Irrthum der Gerichte weniger zu befürchten haben, wenn er unschuldig ist und verdammt wird, als seine eigenen und der Unglücklichen neue Verbrechen, welche das Beispiel seiner Ungestraftheit kühn machen würde, wenn er strafbar wäre und losgesprochen würde? Die Beantwortung dieser Frage hangt von mehrern Elementen ab, deren Erforschung sehr schwierig ist.

So beträchtlich ist die Gefahr, welche die Gesellschaft bedrohen würde, wenn der des Todes schuldige Angeklagte ungestraft bliebe. Zuweilen ist diese Gefahr so groß, daß die Obrigkeit sich gezwungen sieht, den Formen zu entsagen, die zur Sicherheit der Unschuld weislich eingerichtet sind. Was aber obige Frage fast immer unbeantwortlich macht, ist die Unmögliglichkeit der Wahrscheinlichkeit des Verbrechens genau zu schätzen und die zur Verdammung des Angeklagten erforderliche Wahrscheinlichkeit zu bestimmen. Jeder Richter muß sich in dieser Hinsicht auf sein eigenes Gefühl verlassen. Er bildet seine Meinung, indem er die verschiedenen Zeugnisse und die mit dem Vergehen verbundenen Umstände mit den Ergebnissen seines Nachdenkens und seiner Er-

fahrung vergleicht; und nach dieser Ansicht erwirbt man sich durch lange Uebung im Verhören und Richten der Angeklagten eine große Gewandtheit, die Wahrheit selbst unter oft einander widersprechenden Zeugnissen herauszufinden.

Oben erwähnte Frage hangt auch noch von der Größe der für das Vergehen bestimmten Strafe ab; denn es werden natürlich zur Verhängung der Todesstrafe viel stärkere Beweise erfordert, als zu einer Gefängnißstrafe von einigen Monathen. Dieß ist ein Grund mit, die Strafe nach Verhältniß des Verbrechens einzurichten, da, wenn auf ein leichtes Vergehen eine schwere Strafe folgt, es unvermeidlich ist, daß viele wirklich Schuldige losgesprochen werden. Weil das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit des Verbrechens in seine Größe das Maß der Gefahr ist, welche die menschliche Gesellschaft durch die Lossprechung des Angeklagten bedroht, so könnte man denken, die Strafe müßte von dieser Wahrscheinlichkeit abhangen. Indirekt geschieht dieß bei den Gerichten, wo man den Angeklagten eine Zeitlang gefangen hält, gegen welchen zwar sehr starke, aber zu seiner Verdammung noch nicht hinreichende Beweise vorhanden sind; in der Absicht, neue Aufschlüsse zu erhalten, versetzt man ihn nicht sogleich wieder unter seine Mitbürger, die ihn nicht ohne lebhafte Besorgnisse wiedersehen würden. Allein das Willkürliche dieser Maßregel und der Mißbrauch, welcher damit getrieben werden kann, haben die Abschaffung derselben in den Ländern bewirkt, in welchen man auf persönliche Freiheit den größten Werth setzt.

Wie groß wird nun die Wahrscheinlichkeit seyn, daß die Entscheidung eines Gerichts, welches nur mit einer festgesetzten Stimmenmehrheit verdammen kann, gerecht, das heißt, der wahren Beantwortung der oben gesetzten Frage

entsprechend seyn werde? Eine richtige Auflösung dieser wichtigen Aufgabe wird ein Mittel an die Hand geben, die verschiedenen Gerichte mit einander zu vergleichen.

Die Mehrheit einer einzigen Stimme in einem zahlreichen Gerichtshofe zeigt an, daß die zu entscheidende Sache fast ganz zweifelhaft ist; dann wäre also die Verdammung des Angeklagten den die Unschuld beschützenden Gesetzen der Menschlichkeit zuwider. Das einstimmige Urtheil aller Richter würde eine sehr große Wahrscheinlichkeit einer gerechten Entscheidung geben; wollte man sich aber bloß darnach richten, so würden zu viele Schuldige freigesprochen werden. Man muß also entweder die Anzahl der Richter beschränken, wenn man will, daß sie einstimmig seyn sollen, oder man muß die zur Verdammung erforderliche Stimmenmehrheit vergrößern, wenn der Gerichtshof zahlreicher wird. Ich werde es versuchen, die Rechnung auf diesen Gegenstand anzuwenden, in der Ueberzeugung, daß sie immer die beßte Führerin ist, wenn man sie auf Data stützt, welche der gesunde Menschenverstand darbietet.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Meinung jedes Richters die richtige sey, tritt als Hauptelement in diese Rechnung. Sie hangt offenbar von der Beschaffenheit der zu entscheidenden Sache ab. Wenn in einem Gerichtshofe unter tausend und Einem Richter fünf hundert und Einer für die eine Meinung und fünf hundert für die entgegengesetzte Meinung sind, so zeigt sich deutlich, daß die Wahrscheinlichkeit der Meinung jedes Richters sehr wenig ½ übertrifft; denn nimmt man sie merklich größer an, so wäre eine einzige abweichende Stimme schon eine unwahrscheinliche Begebenheit. Sind dagegen die Richter alle derselben Meinung, so zeigt diese an, daß die Beweise einen der Ueberzeugung

erzwingenden Grad von Gewicht haben; dann ist also die Wahrscheinlichkeit der Meinung jedes Richters sehr nahe die Einheit oder Gewißheit, wenn nicht Leidenschaften oder allgemein verbreitete Vorurtheile alle Richter zugleich irre leiten. Außer solchen Fällen muß das Verhältniß der Stimmen für oder wider den Angeklagten allein diese Wahrscheinlichkeit bestimmen. Ich setze also voraus, daß sie sich von ½ bis zu Eins verändern, aber niemals unter ½ seyn kann. Wäre dieß nicht, so würde die Entscheidung des Gerichts unbedeutend, wie das Loos; sie hat nur in so fern Werth, als die Meinung des Richters sich mehr zur Wahrheit, als zum Irrthum neigt. Ich werde demnach durch das Verhältniß der Anzahlen der dem Angeklagten günstigen und ungünstigen Stimmen die Wahrscheinlichkeit der Meinung jedes Richters bestimmen.

Diese Data reichen hin, um einen allgemeinen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß der Ausspruch eines nach einer bekannten Stimmenmehrheit entscheidenden Gerichts der richtige sey.

Bei den Gerichten, an welchen unter acht Richtern fünf Stimmen zur Verdammung eines Angeklagten erforderlich sind, übertrifft die Wahrscheinlichkeit des an der richtigen Entscheidung zu befürchtenden Irrthums ¼. Hat ein Gericht nur sechs Mitglieder, die bloß dann verurtheilen können, wenn vier Stimmen dafür sind, so die Wahrscheinlichkeit des zu befürchtenden Irrthums unter ¼; die Verminderung der Richter ist also hier dem Beschuldigten vortheilhaft. In beiden Fällen ist die erforderliche Stimmenmehrheit dieselbe, nämlich gleich zwei.

Wenn also die Stimmenmehrheit konstant bleibt, so nimmt die Wahrscheinlichkeit des Irrthums mit der Anzahl

der Richter zu; dieß ist allgemein, wie groß auch die erforderliche Stimmenmehrheit seyn mag, wenn sie nur immer dieselbe bleibt. Nimmt man folglich das arithemetische Verhältniß zur Richtschnur, so wird die Lage des Angeklagten um so bedenklicher, je zahlreicher das Gericht wird. Dieses Verhältniß wird in der englischen Pairskammer befolgt, wo zur Verurtheilung eine Mehrheit von Stimmen erfordert wird, wie groß auch die Anzahl der Richter sey. Wenn man glaubte, die entgegengesetzten Stimmen höben einander auf, und die übrigbleibenden zwölf stellten dann gleichsam das einstimmige Urtheil einer Jury von zwölf Mitgliedern dar, welches in England zur Verurtheilung eines Angeklagten erfordert wird, so war man sehr im Irrthum. Der gesunde Verstand sagt schon, daß ein Unterschied zwischen der Entscheidung eines aus zwei hundert zwölf Richtern bestehenden Tribunals, von denen hundert zwölf den Beklagten verdammen und hundert ihn lossprechen, und zwischen der Entscheidung eines Tribunals Statt findet, welches nur aus zwölf Richtern besteht, welche alle zwölf ihn einmüthig verdammen. Im erstern Falle berechtigen die dem Beklagten günstigen hundert Stimmen zu dem Gedanken, daß die Beweise noch lange nicht den Grad von Gewicht erreicht haben, welcher die Ueberzeugung herbeiführt; im zweiten Falle hingegen läßt das einstimmige Urtheil der Richter vermuthen, daß sie jenen Grad wirklich erreicht haben. Der gesunde Menschenverstand allein reicht aber zur Bestimmung des letzten Unterschiedes der Wahrscheinlichkeit des Irrthums in beiden Fällen nicht hin. Hier muß man zur Rechnung seine Zuflucht nehmen, und so findet sich, daß die Wahrscheinlichkeit eines Irrthums im erstern Falle beinahe ein Fünftel und im zweyten nur $\frac{1}{8192}$, also noch nicht der

tausendste Theil der erstern ist. Dieß ist wieder eine Bestätigung des Grundsatzes, daß das arithmetische Verhältniß dem Beklagten nachtheilig ist, wenn die Anzahl der Richter zunimmt. Wird dagegen das geometrische Verhältniß als Regel angenommen, so nimmt die Wahrscheinlichkeit des Irrthums der Entscheidung ab, wenn die Anzahl der Richter zunimmt. So ist bey den Gerichten, die nur mit einer Mehrheit von zwei Drittel der Stimmen verurtheilen können, die Wahrscheinlichkeit des zu befürchtenden Irrthums beinahe ein Viertel, wenn der Richter sechs sind, dagegen unter $1/7$, wenn zwölf Richter da sind. Man muß also weder das arithmethische, noch das geometrische Verhälniß befolgen, wenn die Wahrscheinlichkeit des Irrthums niemals über oder unter einem bestimmten Bruche seyn soll.

An welchen Bruch hat man sich aber nun zu halten? Hier fängt das Willkürliche an, und die Gerichte sind darin sehr verschieden. Bei den Spezialtribunalen, an welchen unter acht Stimmen fünf zur Verdammung des Beklagten hinreichen, ist die Wahrscheinlichkeit des zu befürchtenden Irrthums über die Richtigkeit des Ausspruchs $65/256$ oder über $1/4$. Die Größe dieses Bruchs ist auffallend; zur Beruhigung bedenke man aber, daß der Richter, welcher einen Angeklagten frei spricht, ihn sehr oft nicht als unschuldig betrachtet; er sagt nur aus, daß nicht hinreichende Beweise zur Verurtheilung desselben vorhanden seien. Vorzüglich kann man sich durch das von der Natur dem menschlichen Herzen eingeflößte Mitleiden beruhigen, welches bewirkt, daß die Seele schwer dahin zu bringen ist, in dem ihrem Ausspruche unterworfenen Beklagten einen Schuldigen zu sehen. Dieses Gefühl, welches bei denjenigen noch lebhafter ist, die nicht an gerichtliches Urtheilen gewöhnt sind,

hebt die mit der Unerfahrenheit der Geschwornen verbundenen Nachtheile wieder auf. In einem Geschwornengerichte von zwölf Mitgliedern ist, wenn die zur Verurtheilung erforderliche Mehrheit der Stimmen acht ist, die Wahrscheinlichkeit des zu befürchtenden Irrthums $1093/8192$ oder etwas mehr, als ein Achtel; sie ist beinahe $1/22$, wenn die Stimmenmehrheit neun ist. Wären alle Stimmen einig, so ist die Wahrscheinlichkeit des zu befürchtenden Irrthums $1/8192$, das heißt, mehr als tausendmal so gering, wie in den französischen Jurys.

Die Auflösung der bisher betrachteten Aufgabe reicht aber noch nicht hin, um die einem Tribunale von einer beliebigen Anzahl von Richtern angemessene Stimmenmehrheit festzusetzen. Hierzu muß die Wahrscheinlichkeit des Verbrechens bekannt sein, unter welcher ein Beklagter nicht verurtheilt werden kann, ohne daß dessen Mitbürger den Irrthum der Gerichte mehr zu fürchten haben, als die Verbrechen, welche aus der Ungestraftheit eines freigesprochnen Schuldigen entstehen könnten. Ferner muß die aus der Entscheidung des Gerichts hervorgehende Wahrscheinlichkeit des Vergehens bestimmt und dann die Stimmenmehrheit so festgesetzt werden, daß diese beiden Wahrscheinlichkeiten einander gleich sind.

Es ist aber unmöglich, beide zu erhalten. Die erstere bezieht sich, wie schon gesagt, auf die jedesmalige Lage der menschlichen Gesellschaft, deren genaue Bestimmung sehr schwierig und die stets veränderlich und zu verwickelt ist, um berechnet zu werden. Die zweite hangt von dem ganz unbekannten Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Meinung jedes Richters bei seiner Bestimmung der Wahrscheinlichkeit des Vergehens ab. Da wir also diese beiden Elemente der Rech-

nung nicht kennen, so bleibt nichts Besseres übrig, als von der Auflösung der einzigen Aufgabe auszugeben, welche wir in dieser Art auflösen können und die darin besteht, die Wahrscheinlichkeit des zu befürchtenden Irrthums über die Richtigkeit der Entscheidung eines Gerichts zu bestimmen. Diese Wahrscheinlichkeit scheint mir bei den französischen Gerichten zu groß zu sein, und ich halte es in dieser Hinsicht für angemessen, sich der Englischen Jury zu nähern, wo sie nur 1/8192 ist. Wenn man sie auf den Bruch 1/1024 festgesetzt und dann die zu Erreichung derselben nöthige Stimmenmehrheit festsetzt, so bringt man den Angeklagten in die Lage, in welcher er sich befände, wenn er vor einer Jury von neun Mitgliedern stände, deren einstimmiges Urtheil erfordert würde; dieß scheint mir hinlänglich, die Unschuld vor den Irrthümern der Gerichte und den Staat vor den Uebeln zu schützen, welche die Ungestraftheit der Schuldigen hervorbringen könnte. Aeußerst selten wird dann ein Angeklagter mit einer Wahrscheinlichkeit verurtheilt werden, die geringer ist, als die zu seiner Verurtheilung erforderliche; denn die Mehrheit, welche ihn verdammt, erklärt, daß die Wahrscheinlichkeit seines Vergehens der erforderlichen Wahrscheinlichkeit wenigstens gleich sei, und die Minderzahl, welche ihn freispricht, erklärt daß ihr die erstere der beiden Wahrscheinlichkeiten geringer scheine, als die zweite. Es ist aber natürlich, zu glauben, daß sie nur sehr wenig geringer sei; selten wird also die aus der Gesammtheit der Urtheile des Gerichts folgende mittlere Wahrscheinlichkeit seyn, als die zur Verdammung des Beklagten erforderliche, wenn man durch eine angemessene Stimmenmehrheit die Wahrscheinlichkeit des zu befürchtenden Irrthums über die Wahrheit der Entscheidung des Gerichts auf den Bruch 1/1024 festsetzt. Zur Bestim-

mung jener Stimmenmehrheit gibt die Analysis Formeln, die sich leicht in Tafeln bringen lassen, welche von der Anzahl der Richter abhangen. Aber solche Tafeln scheinen den meisten zu willkürlich, daher sie immer irgend ein leicht zu fassendes arithmetisches und geometrisches Verhältniß vorziehen werden.

Von den Sterblichkeitstabellen, der mittlern Dauer der Lebenszeit, den Ehen und andern Verbindungen.

Die Weise, wie Sterblichkeitstabellen verfertigt werden, ist sehr einfach. Man nimmt aus den Registern der Geburten und Sterbefälle eine große Anzahl von Kindern und verfolgt diese während ihres ganzen Lebenslaufs, indem man anmerkt, wie viele noch zu Ende jedes Jahres am Leben sind; die Anzahl derselben schreibt man neben das endigende Jahr. So schreibt man also neben Null die Anzahl gebornen Kinder, neben Eins die Anzahl derjenigen, welche Ein Jahr erreicht haben, neben zwei diejenigen, welche zwei Jahre alt geworden sind, und so fort. Da die Sterblichkeit aber in den beiden ersten Lebensjahren sehr groß ist, so muß man, um genauere Resultate zu erhalten, in diesem Alter die Anzahl der am Leben Gebliebenen zu Ende jedes halben Jahres aufzeichnen.

Dividirt man die Summe der Lebensjahre aller Individuen in einer Sterblichkeitstabelle durch die Anzahl der Individuen, so erhält man die der Tafel entsprechende mittlere Lebensdauer. Zu diesem Ende multiplizire man mit einem halben Jahre die Anzahl der im ersten Jahre Gestorbenen, welche Anzahl dem Unterschiede der neben Null und

der neben Eins stehenden Individuen gleich ist; denn da ihre Sterblichkeit auf das ganze Jahr gleich vertheilt werden kann, so ist ihre mittlere Lebensdauer nur ein halbes Jahr. Die Anzahl der im zweiten Jahre Gestorbenen wird mit anderthalb Jahren, die Anzahl der im dritten Jahre Gestorbenen mit drittehalb Jahren, und so fort, multiplizirt; der Quotient der Summe dieser Produkte durch die Anzahl der Gebornen wird sehr nahe der mittlern Lebensdauer gleich seyn. Die mittlere Dauer der Zeit, die einer noch zu verleben hat, wenn man von irgend einem Alter ausgeht, wird dadurch bestimmt, daß man mit der Anzahl der zu diesem Alter gelangten Individuen eben so verfährt, wie vorher mit der Anzahl aller Gebornen. Nicht im Augenblicke der Geburt ist die mittlere Lebensdauer am größten, sondern dann, wenn man den Gefahren der ersten Kindheit entgangen ist; und in diesem Zeitpunkte ist sie ungefähr drei und vierzig Jahre. Die Wahrscheinlichkeit, irgend ein Alter zu erreichen, wenn man von einem gegebenen Alter ausgeht, ist dem Verhältnisse der beiden Anzahlen von Individuen gleich, welche in der Tabelle bei den beiden Lebensaltern angemerkt sind.

Um die Resultate genau zu erhalten, muß man zur Verfertigung der Tabellen eine sehr große Anzahl von Geburten gebrauchen. Dann gibt die Analysis sehr einfache Formeln zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, daß die in den Tabellen angeführten Zahlen sich von der Wahrheit nur in engen Gränzen entfernen. Aus diesen Formeln sieht man, daß der Zwischenraum dieser Gränzen abnimmt und die Wahrscheinlichkeit wächst, je mehr Geburten man gebraucht, so daß die Tabellen das wahre Gesetz der Sterblichkeit genau

darstellen würden, wenn die Anzahl der gebrauchten Geburten unendlich groß wäre.

Eine Sterblichkeitstabelle ist also eine Tafel der Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens. Das Verhältniß der neben jedem Jahre stehenden Individuen zu der Anzahl der Geburten ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Neugeborner dieses Jahr erreichen werde. Da man die Größe der Hoffnung dadurch bestimmt, daß man die Produkte aus jedem gehofften Gute in dessen Wahrscheinlichkeit zu einander addirt, so kann man die mittlere Lebensdauer auch so erhalten, indem man die Produkte aus jedem Jahre in die Wahrscheinlichkeit, das Jahr zu erreichen, zusammenzählt. Bildet man also eine Reihe von Brüchen, deren gemeinschaftlicher Nenner die Anzahl der Neugebornen der Tabelle und deren Zähler die neben jedes Jahr von Null an geschriebenen Zahlen sind, so ist die Summe aller dieser Brüche die mittlere Lebensdauer, von welcher noch, um sie genauer zu erhalten ein halbes Jahr abzuziehen ist, wodurch man dasselbe erhält, wie nach der obigen Regel. Allein diese Art, die mittlere Lebensdauer anzusehen, hat den Vortheil, zu zeigen, daß bei einer beständigen Bevölkerung, das heißt: wenn die Anzahl der Gebornen der Anzahl der Gestorbenen gleich ist, die mittlere Lebensdauer das Verhältniß der Bevölkerung zu den jährlichen Geburten ausdrückt; denn wenn man die Bevölkerung beständig annimmt, so ist die Anzahl der Individuen, deren Alter zwischen zwei auf einander folgende Jahre der Tafel fällt, der Anzahl der jährlich Gebornen gleich, multiplizirt mit der halben Summe der Wahrscheinlichkeiten, diese Jahre zu erreichen; die Summe aller der Produkte wird also die ganze Bevölkerung seyn; nun ist leicht einzusehen, daß der Quotient dieser Summe durch die Anzahl der jährlichen Ge-

burten mit der mittlern Lebensdauer, wie sie eben erklärt wurde, einerlei ist.

Vermittelst einer Sterblichkeitstabelle kann man leicht die derselben entsprechende Tafel der als beständig angenommenen Bevölkerung verfertigen. Man nimmt nämlich die arithmetischen Mittel zwischen den Zahlen der Sterblichkeitstabelle, welche den Lebensaltern Null und Ein Jahr, Ein und zwei Jahre, zwei und drei Jahre, und so weiter, entsprechen. Die Summe aller der Mittel ist die ganze Bevölkerung; diese schreibt man neben das Lebensalter Null. Dann zieht man von der Summe das erste Mittel ab; der Rest ist die Anzahl der Individuen von Einem Jahre und darüber; diesen schreibt man neben das Jahr 1. Ferner zieht man von dem ersten Reste das zweite Mittel ab; der zweite Rest ist die Anzahl der Individuen von zwei Jahren und darüber; diesen schreibt man neben das Jahr 2, und so fort.

Auf die Sterblichkeit haben so viele veränderliche Ursachen Einfluß, daß die Tafeln derselben nach Ort und Zeit verschieden seyn müssen. Die verschiedenen Zustände des menschlichen Lebens bieten in dieser Hinsicht sehr merkliche und von den mit jedem Stande verknüpften Beschwerden und Gefahren abhängige Unterschiede dar, welche bei den auf die Dauer des Lebens gegründeten Rechnungen nothwendig berücksichtigt werden müssen. Diese Unterschiede sind aber noch nicht hinlänglich beobachtet worden. Jedoch wird dieß einstens geschehen: dann wird sich ergeben, welches Opfer des Lebens jeder Stand erfordert, und man wird diese Kenntniß zur Verminderung der Gefahren desselben benutzen.

Der mehr oder weniger gesunde Boden, seine Höhe, seine Temperatur, die Sitten der Bewohner und die Verfügungen der Regierung haben beträchtlichen Einfluß auf die

Sterblichkeit. Aber vor der Aufsuchung der Ursache der beobachteten Unterschiede muß man immer die Wahrscheinlichkeit erforschen, mit welcher die Ursache angezeigt wird. So ist das Verhältniß der Bevölkerung zu den jährlichen Geburten, welches in Frankreich schon auf acht und zwanzig und ein Drittel gestiegen ist, in dem alten Herzogthum Mailand noch nicht fünf und zwanzig. Diese Verhältnisse, die sich beide auf eine große Anzahl von Geburten gründen, lassen keinen Zweifel übrig, daß im Mailändischen eine besondere Ursache der Sterblichkeit herrscht, welche die Landesregierung aufzusuchen und zu entfernen hat. *)

Das Verhältniß der Bevölkerung zu den Geburten würde sich noch vermehren, wenn es gelänge, einige gefährliche und sehr verbreitete Krankheiten zu vermindern oder ganz auszurotten. Mit den Blattern ist dieß glücklicher Weise schon geschehen, anfänglich durch die Einimpfung der Krankheit selbst, dann aber weit vortheilhafter durch Einimpfung

*) Die Volksmenge sey $= V$, die Anzahl jährlicher Geburten $= G$, so ist für Frankreich $V = 28\frac{1}{3} . G$, für Mailand $V = 25\ G$, wie wir vollständig annehmen wollen. Also für Frankreich $G = \frac{1}{18\frac{1}{3}} . V$ und für Mailand $G = \frac{1}{25} . V$ Folglich kommen auf einerlei Volksmenge in Mailand beträchtlich mehr Geburten als in Frankreich. Daraus folgt doch wohl nicht gerade zu eine größere Sterblichkeit in Mailand als in Frankreich, weil das Maaß der Sterblichkeit von der Anzahl der jährlich Gebohrnen ganz unabhängig ist. Wäre aber zugleich angegeben, daß die Volksmenge in Frankreich jährlich 1,001 mal, hingegen in Mailand nur 1,0009 mal größer werde, so wäre die größere Sterblichkeit von Mailand einleuchtend.

der Kuhpocken, Jenner's unschätzbare Entdeckung, der dadurch einer der größten Wohlthäter des Menschengeschlechts geworden ist.

Die Blattern haben das Eigenthümliche, daß dasselbe Individuum nicht zweimal davon befallen wird; wenigstens ist der Fall so selten, daß er in der Rechnung vernachläßigt werden kann. Diese Krankheit, welcher vor der Entdeckung der Kuhpocken nur wenige entgingen, ist oft tödtlich, so daß von den Kranken gewöhnlich der siebente stirbt. Zuweilen ist sie auch gutartig, und die Erfahrung zeigte, daß ihr diese letzte Eigenschaft gegeben werden konnte, wenn man sie gesunden und durch eine gute Diät dazu vorbereiteten Personen in einer günstigen Jahrszeit einimpfte. Dann ist das Verhältniß der daran Sterbenden zu den Geimpften noch nicht ein Dreihundertstel. Dieser große Vortheil der Einimpfung, welche überdieß auch die Schönheit nicht zerstört und vor den verdrüßlichen Folgen bewahrt, die oft mit den natürlichen Blattern verbunden sind, bewirkte, daß sie von sehr vielen angenommen wurde. Die Ausübung derselben wurde lebhaft empfohlen, aber, wie es fast immer mit Gegenständen geht, die Unbequemlichkeiten unterworfen sind, auch lebhaft bestritten. Während dieser Uneinigkeit nahm sich Daniel Bernoulli vor, den Einfluß der Einimpfung auf die mittlere Lebensdauer durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmen. Da ihm genaue Data über die von den Blattern in den verschiedenen Lebensaltern bewirkte Sterblichkeit fehlten, so setzte er voraus, die Gefahr, von dieser Krankheit befallen zu werden, und die Gefahr, daran zu sterben, wären in jedem Alter gleich groß. Nach diesen Voraussetzungen gelang es ihm durch eine scharfsinnige Analysis, eine gewöhnliche Sterblichkeitstabelle in solche zu verwandeln,

die Statt haben würden, wenn die Blattern nicht vorhanden wären oder nur sehr wenig Kranke daran stärben; und hieraus schloß er, daß die Einimpfung die mittlere Lebensdauer wenigstens um drei Jahre vermehrte, wodurch ihm der Vortheil derselben außer Zweifel gesetzt zu seyn schien. D'Alembert griff Bernoulli's Analysis an, sowol wegen der Unsicherheit seiner beiden Voraussetzungen, als auch, weil sie mangelhaft wäre, indem dabei die Vergleichung der zwar sehr geringen, aber nahen Gefahr, an der Einimpfung zu sterben, mit der weit größern, aber entferntern Gefahr, den natürlichen Blattern zu unterliegen, außer Acht gelassen worden sei. Diese Rücksicht, welche verschwindet, wenn man eine große Anzahl von Individuen betrachtet, ist eben deshalb den Regierungen gleichgültig, und für sie bleibt daher die Einimpfung vortheilhaft; aber für einen Familienvater ist sie sehr wichtig, da er befürchten muß, wenn er seine Kinder impfen läßt, bald das zu verlieren, was ihm am liebsten auf Erden ist, und selbst an dem Verluste Schuld zu seyn. Viele Eltern wurden durch diese Furcht zurückgehalten, die endlich durch Entdeckung der Kuhpocken glücklich verschwunden ist. Durch ein Geheimniß, deren wir so viele in der Natur finden, sind die Kuhpocken ein Schutzmittel gegen die Blattern, eben so sicher, wie das Blatterngift, und ganz ohne Gefahr; sie bringen keine Krankheit hervor und erfordern nur sehr wenig Sorgfalt. Die Einimpfung derselben hat sich auch schnell verbreitet, und um sie allgemein zu machen, ist nur noch die natürliche Trägheit des Volks zu besiegen, gegen welche man unaufhörlich zu kämpfen hat, selbst wenn man der Menschen Bestes wahrhaft wünscht.

Das einfachste Mittel, den aus der Vertilgung einer

Krankheit entspringenden Vortheil zu berechnen, besteht darin, durch Beobachtung zu bestimmen, wieviel Menschen von einem gegebenen Alter daran jährlich sterben, und die gefundene Anzahl aller in demselben Alter Gestorbenen abzuziehen. Das Verhältniß des Unterschiedes zu der Anzahl aller Individuen von dem gegebenen Alter würde die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, in dem Jahre und dem gegebenen Alter zu sterben, wenn die Krankheit nicht vorhanden wäre. Addirt man also diese Wahrscheinlichkeiten von der Geburt an bis zu irgend einem Alter und subtrahirt die Summe von Eins, so ist der Rest die Wahrscheinlichkeit, bis zu diesem Alter zu leben, vorausgesetzt, daß die Krankheit ausgerottet sey. Die Reihe jener Wahrscheinlichkeiten wird die Sterblichkeitstabelle unter dieser Voraussetzung seyn; und darnach läßt sich nun, dem obigen zufolge, die mittlere Lebensdauer bestimmen. So hat Duvilard für die durch Einimpfung der Kuhpocken bewirkte Zunahme der mittlern Lebensdauer wenigstens drei Jahre gefunden. Ein so beträchtlicher Zuwachs müßte die Bevölkerung stark vermehren, wenn diese nicht außerdem durch die relative Verminderung der Ernährungsmittel wieder eingeschränkt würde. *)

---

*) Wir wollen setzen, vor der Pocken-Einimpfung sey die Anzahl der jährlich Gestorbenen = $1/30$ der Volksmenge gewesen; so mußte in 30 Jahren eine ganze Generation aussterben, oder 30 Jahre waren die mittlere Dauer einer Generation. Wird nun diese mittlere Dauer durch die Einimpfung um 3 Jahre vergrößert, so würde daraus folgen, daß jetzt nur $1/33$ der Volksmenge jährlich verstürbe. Wäre nun vorher die Volsmenge auch nicht im Wachsthum sondern nur im Beharrungsstande gewesen, so wäre jetzt das Ver-

Der fortschreitende Gang der Bevölkerung wird vorzüglich durch den Mangel an Ernährungsmitteln aufgehalten. Bei allen Arten von Thieren und Pflanzen strebt die Natur unaufhörlich dahin, die Anzahl der Individuen so lange zu vermehren, bis sie mit den Mitteln zu ihrer Ernährung im

---

hältniß der Gebohrnen zu dem der Sterbenden doch schon = $1/30 : 1/33 = 11 : 10$, so daß sich die Volksmenge schon nach 4 Jahren verdoppeln müßte. Düvilards Berechnung ist also augenscheinlich unrichtig. Es kommt aber hier noch ein anderer Umstand in Betrachtung, den, so wichtig er auch ist, Laplace ganz übersehen hat. Wenn nämlich z. B. von 500 Gestorbenen 30 an den Blattern gestorben sind, so wäre nach Laplace die Anzahl der Gestorbenen bei ausgerotteten Blattern nur = 470. Dieses läßt sich aber keinesweges annehmen, weil an die Stelle weggeschaffter Krankheiten einer Art gewöhnlich wieder welche von anderer Art treten, und dieses vorzüglich der Fall bei Kinderkrankheiten ist. Sterben also Keine mehr an Blättern, so können dagegen statt der 30, welche an den Blattern gestorben waren, z. B. 20, 22, 25 ꝛc. an andere Krankheiten sterben, so daß die Zahl der Sterbenden nicht auf 470, sondern auf 490, 492, 495 ꝛc. herabfällt. Die ganze Volksmenge könnte also z. B. mehr 4jährige, mehr 5jährige, mehr 6jährige ꝛc. enthalten, als vormals, aber diese Mehrzahl könnte mit den größeren Altern immer mehr abnehmen, so daß z. B. die Anzahl der 15jährigen schon nur noch unbedeutend größer wäre als vormals. Und was hätte nun der Staat hiermit gewonnen? da auf solche Weise nur die konsumirende Menschenklasse, nicht aber die producirende, bedeutend vergrößert worden wäre.

Gleichgewichte stehen. Unter den Menschen haben moralische Ursachen einen großen Einfluß auf Bevölkerung. Kann der Boden leicht urbar gemacht werden und dadurch neuen Geschlechtern Nahrung im Ueberfluß verschaffen, so ermuthigt die Gewißheit, eine zahlreiche Familie erhalten zu können, zu Heirathen; sie werden frühzeitiger geschlossen und sind fruchtbarer. Auf solch einem Boden müssen Bevölkerung und Geburten zugleich in geometrischer Progression zunehmen. Wird aber das Bebauen des Landes schwieriger und seltner, dann nimmt der Zuwachs der Bevölkerung ab; diese nähert sich immerwährend dem veränderlichen Zustande der Erhaltungsmittel, um welchen sie Schwingungen macht, fast wie ein Pendel, dessen Aufhängepunkt langsam hin und her bewegt wird, durch seine Schwere um diesen Punkt schwingt. Das Maximum des Zuwachses der Bevölkerung ist schwer zu bestimmen; nach einigen Beobachtungen scheint es, als wenn sich unter günstigen Umständen die Anzahl der Menschen alle fünfzehn Jahre verdoppeln könnte. in Nordamerika soll die Periode dieser Verdoppelung fünf und zwanzig Jahre seyn. Bei diesem Zustande der Dinge wachsen die Bevölkerung, die Geburten, die Ehen und die Sterblichkeit alle nach einer und derselben geometrischen Progression, in welcher man das beständige Verhältniß der auf einander folgenden Ausdrücke durch die Beobachtung der jährlichen Geburten zu zwei verschiedenen Zeitpunkten erhält.

Da eine Sterblichkeitstabelle die Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens darstellt, so kann man vermittelst derselben die Dauer der Ehen bestimmen. Setzt man, um die Sache zu vereinfachen, die Sterblichkeit beider Geschlechter einander gleich, so findet man die Wahrscheinlichkeit, daß die Ehe Ein Jahr, oder zwei, oder drei Jahre, und so

weiter, dauern werde, wenn man eine Reihe von Brüchen bildet, deren gemeinschaftlicher Nenner das Produkt der den Lebensaltern der Verheuratheten entsprechenden beiden Zahlen der Tafel ist und deren Zähler die auf einander folgenden Produkte der diesen um Ein Jahr, oder zwei, oder drei Jahre, und so weiter, vermehrten Lebensaltern entsprechenden Zahlen sind. Die um ein Halb vermehrte Summe der Brüche wird dann die mittlere Dauer der Ehe bezeichnen, wenn das Jahr als Einheit genommen wird. Dieselbe Regel läßt sich leicht auf die mittlere Dauer irgend einer aus drei oder mehr Personen bestehenden Verbindung anwenden. *)

Von den Vortheilen der Einrichtungen, welche von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten abhangen.

Hier wollen wir uns an das erinnern, was oben gesagt wurde, wo von der Hoffnung die Rede war. Wir fanden, daß man, um den Vortheil zu erhalten, der aus mehrern einfachen Begebenheiten entspringt, von welchen einige ein Gut und die andern einen Verlust hervorbringen, die Produkte aus der Wahrscheinlichkeit jeder günstigen Begebenheit in das mit derselben verbundene Gut zu einander addiren und von der Summe alle Produkte aus der Wahrscheinlichkeit jeder ungünstigen Begebenheit in den mit ihr verknüpften Verlust abziehen muß. Wie groß aber auch der durch den Unterschied dieser Summen ausgedrückte Vor-

*) Das ausführlichste und gründlichste Werk über diesen Gegenstand ist das von Tetens. Ausserdem gehören noch hierhin die Schriften von Karsten, von Michelsen und meine Arithmetische Abhandlungen.

theil seyn mag, so schützt doch eine einzige aus jenen einfachen Ereignissen zusammengesetzte Begebenheit noch nicht vor der Furcht, einen wirklichen Verlust zu erleiden. Natürlich muß die Furcht abnehmen, wenn man die zusammengesetzte Begebenheit vervielfältigt. Die Analysis der Wahrscheinlichkeiten führt nun auf folgenden allgemeinen Satz:

Durch die Wiederholung einer einfachen oder zusammengesetzten vortheilhaften Begebenheit wird der wahre Nutzen immer wahrscheinlicher und wächst unaufhörlich; er wird gewiß, unter der Voraussetzung, daß die Anzahl der Wiederholungen unendlich groß sei; und dividirt man ihn durch die Anzahl der Wiederholungen, so ist der Quotient oder der aus jeder Begebenheit fließende mittlere Nutzen die mathematische Hoffnung selbst oder der mit der Begebenheit verbundene Vortheil. Eben so ist es mit dem Verluste, der auf die Dauer gewiß wird, wenn die Begebenheit auch noch so wenig ungünstig ist.

Dieser Lehrsatz über Vortheile und Nachtheile ist den Sätzen analog, welche oben über die bei unbestimmter Wiederholung einfacher oder zusammengesetzter Begebenheiten Statt findenden Verhältnisse gegeben worden sind, und beweißt, wie sie, daß sich sogar bei den dem sogenannten Zufall am meisten unterworfenen Begebenheiten zuletzt Regelmäßigkeit einstellt.

Wenn die Anzahl der Begebenheiten sehr groß ist, so gibt die Analysis noch einen sehr einfachen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daß der wirkliche Vortheil im bestimmten Gränzen eingeschlossen sei, welcher Ausdruck wieder unter das allgemeine Gesetz der Wahrscheinlichkeit gehört, welches früher angeführt worden ist, wo von den aus unbestimmter

Vervielfältigung der Begebenheiten entspringenden Wahrscheinlichkeiten die Rede war.

Von der Wahrheit des vorher gegebenen Lehrsatzes hängt das Bestehen der auf Wahrscheinlichkeit gegründeten Einrichtungen ab. Um aber auf dieselben angewendet werden zu können, müssen solche Einrichtungen durch zahlreiche Geschäfte die vortheilhaften Begebenheiten vervielfältigen.

Auf die Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens sind verschiedene Einrichtungen gegründet, wie die Leibrenten und die Tontinen. Die allgemeinste und einfachste Methode, die Vortheile und die Lasten dieser Einrichtungen zu berechnen, besteht darin, sie auf gegenwärtige Kapitalien zu reduziren. Die jährliche Interessen der Einheit heißen der Zinsfuß. Am Ende jedes Jahres bekommt ein Kapital zum Faktor die Einheit, plus dem Zinsfuße; es wächst also nach einer geometrischen Progression, deren Exponent dieser Faktor ist. Folglich wird es durch die Wirkung der Zeit unermeßlich groß. Wenn der Zinsfuß zum Beispiel $\frac{1}{20}$ oder fünf Prozent ist, so verdoppelt sich das Kapital sehr nahe in vierzehn Jahren, vervierfacht sich in neun und zwanzig Jahren und wird in weniger, als drei Jahrhunderten zwei Millionen mal so groß.

Eine so außerordentliche Vergrößerung hat auf den Gedanken geführt, sich derselben zur Tilgung der öffentlichen Schuld zu bedienen. Wird anfänglich ein Tilgungsfond gestiftet und dieser unaufhörlich mit den Zinsen auf die öffentlichen Papiere gesetzt, indem man vorzüglich die Augenblicke benutzt, da diese niedrig stehen, und wird davon, wenn die Bedürfnisse des Staats Anleihen nothwendig machen, ein Theil der Vergrößerung des Tilgungsfonds aufgeopfert, so ist natürlich, daß solche Operationen den doppelten Vor-

theil haben werden, den Fond zu vermehren und den Kredit und die Staatspapiere aufrecht zu erhalten; und auf die Dauer wird durch die Tilgungskasse ein großer Theil der Nationalschuld abgetragen werden können. Glückliche Erfahrungen haben diese Vortheile richtig bestätigt. Aber die zu dem glücklichen Erfolge ähnlicher Einrichtungen so nöthige Beständigkeit und Treue in den Verpflichtungen können nur durch eine Regierung wohl garantirt werden, bei welcher die gesetzgebende Macht in mehrere Zweige getheilt ist. Das Zutrauen, welches die nothwendige Zusammenwirkung dieser Zweige einflößt, verdoppelt die Kraft des Staats; und der Herrscher selbst gewinnt an gesetzlicher Macht weit mehr, als er an willkürlicher verliert.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß ein gegenwärtiges Kapital, welches mit einer erst nach einer gewissen Anzahl von Jahren zahlbaren Summe einerlei Werth hat, dem Produkte aus dieser Summe in die Wahrscheinlichkeit, daß sie zu der Zeit werde ausgezahlt werden, gleich ist, wenn man dieß Produkt noch durch die auf die Potenz der Anzahl der Jahre erhobene Summe der Einheit und des Zinsfußes dividirt.

Dieser Grundsatz läßt sich leicht auf Leibrenten für Eine oder mehrere Personen und auf Spar- und Versicherungskassen jeder Art anwenden. Gesetzt, man wollte nach einer gegebenen Sterblichkeitstabelle eine Leibrententafel verfertigen. Nun ist eine nach fünf Jahren, zum Beispiel, zahlbare Leibrente, wenn man sie in ein gegenwärtiges Kapital verwandelt, nach dem Grundsatze dem Produkte folgender beiden Größen gleich, nämlich, des Quotienten, der herauskommt, wenn die Rente durch die fünfte Potenz der um den Zinsfuß vermehrten Einheit dividirt wird, und der Wahr-

scheinlichkeit, daß sie werde bezahlt werden. Letztere Wahrscheinlichkeit ist das umgekehrte Verhältniß der in der Tabelle neben dem Alter dessen, der die Rente errichtet, stehenden Zahl von Individuen zu der neben einem um fünf Jahre höhern Alter stehenden Zahl. Wenn man also eine Reihe von Brüchen bildet, deren Nenner die Produkte aus der Anzahl der in der Sterblichkeitstabelle in dem Alter desjenigen, welcher die Rente errichtet, als lebend angezeigten Personen in die auf einander folgenden Potenzen der um den Zinsfuß vermehrten Einheit und deren Zähler die Produkte aus der Rente in die Anzahl der in demselben nach und nach um Ein Jahr, zwei Jahre, und so fort, vermehrten Alter lebenden Personen sind, so wird die Summe aller Brüche dem zur Leibrente in diesem Alter erforderlichen Kapitale gleich seyn.

Wir wollen einmal annehmen, es wünschte jemand seinen Erben ein am Ende seines Todesjahres auszuzahlendes Kapital vermittelst einer Leibrente zu versichern. Um den Werth einer solchen Rente zu bestimmen, kann man sich vorstellen, der Genannte borgte als Leibrentner einer Kasse das durch die um den Zinsfuß vermehrte Einheit dividirte Kapital ab und setzte es zu immerwährenden Zinsen auf dieselbe Kasse. Natürlich ist nun am Ende seines Todesjahres die Kasse seinen Erben das Kapital schuldig; aber sie wird jährlich nur den Ueberfluß der Leibrentenzinsen über die immerwährenden Zinsen bezahlt haben. Die Leibrententafel wird also ausweisen, was der Genannte jährlich an die Kasse bezahlen muß, um das Kapital nach seinem Tode zu versichern.

Die See-, Brand- und Gewitterentschädigungsanstalten und überhaupt alle dergleichen Einrichtungen sind nach denselben Grundsätzen zu berechnen. Ein Kaufmann hat Schiffe auf dem Meere, er will ihren Werth und den Werth ihrer

Ladung gegen mögliche Gefahren sicher stellen; zu diesem Behufe bezahlt er eine gewiße Summe an eine Gesellschaft, die ihm für den taxirten Werth seiner Schiffe und ihrer Ladungen einsteht. Das Verhältniß dieses Werthes zu der als Versicherungsgeld auszuzahlenden Summe hangt von den Gefahren ab, denen die Schiffe ausgesetzt sind, und kann nur durch zahlreiche Beobachtungen über das Schicksal der aus demselben Hafen zu derselben Bestimmung ausgelaufenen Schiffe bestimmt werden.

Wenn der Versicherer an die Versicherungsgesellschaft nur die durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung angegebene Summe bezahlte, so könnte diese Gesellschaft die mit ihrer Einrichtung verbundenen Auslagen nicht bestreiten; das Versicherungsgeld muß also höher angesetzt werden. Welchen Vortheil hat er aber dann davon? Hier wird nun die Betrachtung der moralischen Hoffnung nothwendig. Da ein Spiel, wenn der Vortheil auf beiden Seiten auch noch so wenig ungleich ist, dennoch, wie wir oben gesehen haben, nachtheilig wird, weil der Spieler einen gewissen Einsatz gegen den noch ungewissen Gewinn dahingibt, so ist leicht einzusehen, daß die Versicherung, bei welcher man das Ungewisse gegen etwas Gewisses vertauscht, vortheilhaft seyn muß. Wirklich folgt auch dasselbe aus der oben gegebenen Regel zur Bestimmung der moralischen Hoffnung, aus welcher zugleich hervorgeht, ein wie großes Opfer man der Versicherungsgesellschaft bringen kann, um immer noch einen moralischen Vortheil zu behalten. Diese Gesellschaft kann also diesen Vortheil gewähren und doch selbst dabei viel gewinnen, vorausgesetzt, daß die Anzahl der Versicherer sehr beträchtlich sei, welche Bedingung zu ihrem fortgesetzten Bestehen unerläßlich ist. Dann wird ihr Gewinn gewiß.

und ihre mathematische Hoffnung fällt mit der moralischen zusammen. Denn die Analysis führt zu dem allgemeinen Satze, daß, wenn die Erwartungen sehr zahlreich sind, die beiden Hoffnungen sich einander unaufhörlich nähern und zuletzt, in dem Falle einer unendlichen Anzahl von Erwartungen, zusammenfallen.

Unter den auf die Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens gegründeten Einrichtungen sind diejenigen die nützlichsten, durch welche man vermittelst einer kleinen Aufopferung seines Einkommens seiner Familie den Unterhalt für eine Zeit sichert, in welcher man fürchten muß, ihren Bedürfnissen nicht mehr Genüge leisten zu können. So unmoralisch das Spiel ist, so vortheilhaft für die Sitten sind diese Einrichtungen, da sie die süßesten uns von der Natur eingeflößten Neigungen begünstigen. Die Regierung muß sie also unterstützen und bei ihren Veränderungen stets achten; denn da die Hoffnungen, zu welchen sie berechtigen, erst in entfernter Zukunft erfüllt werden können, so können sie nur dann blühen, wenn nicht die geringste Unsicherheit über ihre Dauer Statt findet.

Noch ein Wort über Anleihen. Es ist deutlich, daß man, um auf beständig zu leihen, jährlich das Produkt aus dem Kapitale in den Zinsfuß bezahlen muß. Es kann aber seyn, daß man das Kapital während einer bestimmten Anzahl von Jahren in gleichen Zahlungen abtragen will, Terminzahlungen genannt, und der Werth derselben wird dann so bestimmt. Jede Terminzahlung muß, wenn sie auf den gegenwärtigen Augenblick reduzirt werden soll, durch die um den Zinsfuß vermehrte und auf eine der Anzahl von Jahren, nach welchen die Terminzahlung abgetragen werden muß, gleiche Potenz erhobene Einheit dividirt werden. Wenn

man also eine geometrische Progression bildet, deren erstes Glied die durch die Summe der Einheit und des Zinsfußes dividirte Terminzahlung und deren letztes Glied die Terminzahlung, dividirt durch dieselbe aber auf eine der Anzahl von Jahren, nach welchen die Auszahlung geschehen muß, gleiche Potenz erhobene Größe, ist, so wird die Summe dieser Progression dem geliehenen Kapitale gleich kommen; hierdurch läßt sich der Werth der Terminzahlung bestimmen. Will man eine Leibrentenanleihe machen, so ist zu bemerken, daß, da die Leibrententafeln das zur Errichtung einer Leibrente in einem beliebigen Alter erforderliche Kapital angegeben, sich durch eine einfache Proportion die Rente ergibt, welche man jemanden übermachen muß, von dem man ein Kapital leiht. Nach diesen Grundsätzen lassen sich alle möglichen Arten von Anleihen berechnen.

Von den Täuschungen bey der Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten.

Der Verstand hat seine Täuschungen, wie der Sinn des Gesichts; und so wie das Gefühl diese berichtigt, so werden jene durch Denken und Rechnen entfernt. Die auf eine tägliche Erfahrung gegründete oder durch Furcht und Hoffnung vergrößerte Wahrscheinlichkeit ist uns auffallender, als eine größere, aber allein aus der Rechnung folgende Wahrscheinlichkeit. So fürchten wir nicht im geringsten, unser Leben für geringe Vortheile Gefahren auszusetzen, die weit weniger unwahrscheinlich sind, als das Herauskommen einer Quine in der Lotterie; und doch würde sich niemand dieselben Vortheile verschaffen wollen, sobald es gewiß wäre, daß er sein Leben verlieren müßte, wenn die Quine herauskäme.

Unsere Leidenschaften, unsere Vorurtheile und die herrschenden Meinungen sind, da sie die ihnen günstigen Wahrscheinlichkeiten vergrößern und die entgegengesetzten verkleinern, reichhaltige Quellen gefährlicher Täuschungen.

Die gegenwärtigen Uebel und ihre Ursache machen einen viel größern Eindruck auf uns, als das Andenken an die durch die entgegengesetzte Ursache hervorgebrachten Leiden; sie verhindern uns, die Nachtheile beider und die Wahrscheinlichkeit der zur Verhütung derselben geeigneten Mittel richtig zu bestimmen. Dadurch nähern sich wechselsweise dem Despotismus und der Anarchie die aus dem Zustande der Ruhe herausgetretenen Völker, zu welchem sie erst nach langen und grausamen Bewegungen wieder gelangen können.

Der lebhafte Eindruck, den gegenwärtigen Ereignisse auf uns machen und vor welchem wir die von andern wahrgenommenen entgegengesetzten Begebenheiten kaum bemerken können, ist eine Hauptursache von Irrthümern, vor denen man sich nicht genug hüten kann.

Die Verhältnisse gewisser merkwürdiger Ereignisse zu den Vorhersagungen der Astrologen, Wahrsager und Propheten, zu den Ahnungen und Träumen, zu den Zahlen und den für glücklich oder unglücklich gehaltenen Tagen, und dergleichen mehr, haben eine Menge auch jetzt noch sehr verbreiteter Vorurtheile hervorgebracht. Man denkt nicht an die große Anzahl von Fällen, da sie nicht eintrafen weil diese keinen Eindruck gemacht haben oder nicht bekannt sind. Dennoch ist es nöthig, sie alle zu kennen, wenn man die Wahrscheinlichkeit der Ursachen bestimmen will, denen das Eintreffen zugeschrieben wird. Diese Kenntniß würde ohne Zweifel das bestätigen, was uns die Vernunft in Hinsicht solcher Vorurtheile sagt.

So that der Philosoph des Alterthums, dem man in einem Tempel, um die Macht des darin verehrten Gottes zu erheben, die Weihgeschenke aller derer zeigte, die nach Anrufung desselben vom Schiffbruche gerettet worden waren, eine der Wahrscheinlichkeitsrechnung angemessene Frage, indem er wissen wollte, wo denn die Namen derer ständen, die ungeachtet ihres Flehens umgekommen wären. Solche Vorurtheile hangen von zum Theil mechanischen Ursachen ab, die oft stark auf die Einbildungskraft wirken, sich aber durch Erfahrung immer entfernen lassen. Hätte, zum Beispiel, Augustus, der die Schwäche besaß, daß er es nicht wagte, an Tagen, welche auf solche folgten, an denen Forum gehalten worden war, auf Reisen zu gehen, mehrmehls versucht, sie zu besiegen, so würde ihn die Vergleichung dieser Reisen mit andern bald von der eingebildeten Furcht befreit haben.

Vorzüglich unterhält beim Spiele eine Menge von Täuschungen die Hoffnung und unterstützt sie gegen die ungünstigen Zufälligkeiten. Die meisten von denen, die in die Lotterien setzen, wissen nicht, wie viele Zufälle ihnen günstig und wie viele ihrem Vortheile zuwider sind. Sie betrachten nur die Möglichkeit, für einen geringen Einsatz eine beträchtliche Summe zu gewinnen; und die von ihrer Einbildungskraft entworfnen Plane vergrößern in ihren Augen die Wahrscheinlichkeit des Gewinns. Sie würden ohne Zweifel vor der unermeßlichen Anzahl derer erschrecken, die verloren haben, wenn sie dieselbe kennten; dagegen gibt man sich aber Mühe, die Gewinne weit umher bekannt zu machen.

Wenn in der französischen Lotterie eine Nummer seit langer Zeit nicht herausgekommen ist, so beeifert sich die Menge, diese mit Einsätzen zu bedecken. Sie glaubt; da

die Nummer lange nicht herauskam, so würde sie bei der nächsten Ziehung eher herauskommen, als irgend eine andere. Ein so gewöhnlicher Irrthum scheint mir von einer Täuschung abzuhangen, durch welche man unwillkürlich auf den Ursprung der Begebenheiten geleitet wird. Es ist, zum Beispiel, sehr unwahrscheinlich, daß man bei dem Spiele Münz und Flach zehnmal hinter einander Münz werfen werde. Diese Unwahrscheinlichkeit, die uns noch auffällt, wenn Münz neunmal gefallen ist, bringt uns zu dem Glauben, daß beim zehnten Male Flach fallen werde. Dennoch sollte uns das Vergangene nicht im Geringsten zu einem solchen Schlusse verleiten; sondern, da es in dem Geldstücke eine größere Neigung für Münz, als für Flach anzeigt, so macht es ja die erstere Begebenheit wahrscheinlicher, als die zweite; es vermehrt, wie wir auch oben schon gesehen haben, die Wahrscheinlichkeit, Münz auch noch beim folgenden Male zu werfen. Durch eine ähnliche Täuschung lassen sich viele überreden, man könne sicher in der Lotterie gewinnen, wenn man jedelmal auf dieselbe Nummer, bis sie herausgekommen sey, eine Summe setze, deren Betrag alle vorhergegangenen Einsätze auf dieselbe Nummer zusammengenommen übersteige.

Wenn aber auch solche Spekulationen nicht oft durch die Unmöglichkeit gehemmt würden, sie auszuhalten, so würden sie den mathematischen Nachtheil der Spekulanten doch nicht vermindern und den moralischen noch vergrößern, weil die Spieler bei jeder Ziehung einen größern Theil ihres Vermögens aussetzen.

Ich habe Männer gesehen, welche sehnlich wünschten, einen Sohn zu haben, und denen es deshalb unangenehm war, wenn in dem Monathe, in welchem sie Väter werden

sollten, Knaben geboren wurden. Sie bildeten sich ein, das Verhältniß oder männlichen Geburten zu den weiblichen müßte am Ende jedes Monathes dasselbe seyn, und glaubten daher, die schon gebornen Knaben machten es wahrscheinlicher, daß nächsten Geburten Mädchen bringen würden; so wie das Herausziehen einer weißen Kugel aus einer Urne, die eine begränzte Anzahl weißer und schwarzer Kugeln in einem gegebenen Verhältnisse enthält, die Wahrscheinlichkeit vermehrt, bei dem folgenden Male eine schwarze Kugel herauszuziehen. Dieß hört aber dann auf, wenn die Anzahl der Kugeln in der Urne unbegränzt ist; wie man voraussetzen muß, um diesen Fall mit dem Falle der Geburten vergleichen zu können. Wenn in einem Monathe weit mehr Knaben, als Mädchen geboren wären, so könnte man muthmaßen, es habe um die Zeit ihrer Empfängniß eine allgemeine Ursache die Empfängnisse männlicher Wesen begünstigt, und dadurch würde es wieder wahrscheinlicher, daß die nächstfolgende Geburt auch eine männliche seyn würde. Die unregelmäßigen Begebenheiten in der Natur sind mit dem Herauskommen der Nummern aus der Lotterie nicht geradezu zu vergleichen, da bei dieser alle Nummern in jeder Ziehung so gemischt werden, daß die Zufälligkeiten des Herauskommens einander vollkommen gleich werden. Die Wiederholung einer Erscheinung in der Natur scheint eine etwas dauerhafte Ursache anzuzeigen, die sie begünstigt, wodurch denn die Wahrscheinlichkeit zunimmt, daß sie bald wiederkehren werde; und währt die Wiederholung lange fort, wie wenn es eine lange Reihe von Tagen hinter einander regnet, so kann sie auf die Entdeckung noch unbekannter Ursachen ihrer Veränderung führen; so sind wir also hier bei jeder erwarteten Begebenheit nicht, wie bei jeder Ziehung einer Lotterie,

in demselben Zustande von Unentschiedenheit über das Zukünftige. Je mehr man aber die Beobachtungen dieser Begebenheiten vervielfältigt, desto genauer wird die Vergleichung ihrer Resultate mit den Resultaten der Lotterien.

Durch eine den vorhergenannten entgegengesetzte Täuschung verleitet, suchen viele aus den vergangenen Ziehungen der Lotterie die am häufigsten herausgekommenen Nummern auf, um daraus Kombinationen zu bilden, auf welche sie mit Vortheil setzen zu können glauben. Betrachtet man aber die Weise, wie das Mischen der Nummern in der Lotterie geschieht, so sieht man, daß die Vergangenheit dabey nicht den mindesten Einfluß auf die Zukunft hat. Das häufigere Herauskommen einer Nummer ist nur Anomalie des Zufalls, deren ich mehrere berechnet, aber stets gefunden habe, daß sie in Gränzen eingeschlossen waren, welche die Voraussetzung einer gleichen Möglichkeit des Herauskommens aller Nummern ohne Unwahrscheinlichkeit annehmen läßt.

In einer langen Reihe Begebenheiten von derselben Art müssen die bloßen Wirkungen des Zufalls zuweilen den sonderbaren Gang von Glück oder Unglück darstellen, den die meisten Spieler nicht ermangeln, einer Art von Fatum zuzuschreiben. Oft sucht bei Spielen, die zugleich vom Zufall und von der Geschicklichkeit der Spieler abhangen, derjenige, welcher verliert, wenn ihn sein Verlust verwirrt gemacht hat, durch Wagstücke das Verspielte wieder zu gewinnen, was er in einer andern Lage vermeiden würde; so vermehrt er sein Unglück und verlängert dessen Dauer. Dann aber wird die Klugheit nothwendig und die Ueberzeugung wichtig, daß der mit den ungünstigen Zufälligkeiten verbundene moralische Nachtheil durch das Unglück selbst noch vermehrt wird.

Das Gefühl, durch welches der Mensch, sich als den Hauptgegenstand der Sorgfalt der Natur betrachtend, im Mittelpunkt des Weltalls befindlich zu seyn, lange Zeit glaubte, bringt jeden Einzelnen dahin, sich zu dem Mittelpunkte eines mehr oder weniger ausgedehnten Kreises zu machen und zu glauben, der Zufall habe Vorliebe für ihn. Dieser Meinung folgend, setzen die Spieler oft beträchtliche Summen auf Spiele, von denen sie wissen, daß die Zufälligkeiten ihnen entgegen sind. Im menschlichen Leben kann solche Meinung zuweilen Vortheile bringen; aber meistens führt sie zu schrecklichen Unternehmungen. Hier sind, wie überall, die Täuschungen gefährlich, und die Wahrheit allein ist allgemein nützlich.

Ein großer Vortheil der Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht darin, daß man lernt, dem ersten Anschein nicht zu trauen, da man sieht, daß dieser oft täuscht, wenn man ihn berechnen kann, so folgt daraus, daß man sich ihm bei andern Gegenständen nur mit der äußersten Vorsicht hingeben muß. Wir wollen dieß mit Beispielen belegen.

Eine Urne enthalte vier Kugeln, von denen einige schwarz, andere weiß seyen. Man hat eine weiße Kugel herausgezogen und sie dann wieder hineingelegt, um von neuem Kugeln herauszuziehen. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, in den vier folgenden Malen nur schwarze Kugeln herauszuziehen?

Wäre die Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln gleich groß, so würde diese Wahrscheinlichkeit die vierte Potenz seyn von der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$, jedesmal eine schwarze Kugel herauszuziehen; sie wäre also $\frac{1}{2}$. Aber das Herausziehen einer weißen Kugel beim ersten Male läßt eine größere Anzahl weißer Kugeln in der Urne vermuthen; denn setzt man, die Urne enthalte drey weiße Kugeln und

Eine schwarze, so ist die Wahrscheinlichkeit, Eine weiße Kugel herauszuziehen, $\frac{3}{4}$; sie ist $\frac{2}{4}$ oder $\frac{1}{2}$, wenn in der Urne zwey weiße und zwey schwarze Kugeln angenommen werden; und sie ist nur $\frac{1}{4}$, wenn vorausgesetzt wird, die Urne enthalte drei schwarze Kugeln und Eine weiße. Nach dem Grundsatze der aus den Wirkungen gefolgerten Wahrscheinlichkeit der Ursachen, verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Voraussetzungen zu einander, wie die Größen $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$; sie sind folglich $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{1}{6}$. Nach dem 6. Grundsatze muß jede der Größen $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$ und $\frac{1}{4}$ durch ihre Summe oder $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}$ dividirt werden, wodurch man $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{1}{6}$ als die gesuchten Wahrscheinlichkeiten erhält. Folglich verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß mehr oder eben so viel weiße Kugeln da sind, als schwarze, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, wie $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} : \frac{1}{6} = \frac{5}{6} : \frac{1}{6} = 5 : 4$, daher fünf gegen Eins dafür zu wetten ist.

Es ist nämlich $(\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256}$, $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ und $(\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}$; jenes mit $\frac{1}{6}$, das mittlere mit $\frac{1}{3}$ und dieses mit $\frac{1}{2}$ multiplizirt, gibt $\frac{81}{1536}$, $\frac{1}{48}$ und $\frac{1}{512}$ oder $\frac{20\frac{1}{4}}{384}$, $\frac{8}{384}$ und $\frac{\frac{3}{4}}{384}$, daher zusammen $\frac{20\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 8}{384}$ $= \frac{29}{384} = \frac{1\frac{11}{192}}{14} =$ der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

Es ist also fünf gegen Eins zu wetten, daß die Anzahl der schwarzen Kugeln von der Anzahl der weißen übertroffen werde oder ihr doch nur gleich sei. Es scheint also, als müßte nach Herausziehung einer weißen Kugel beim ersten Zuge die Wahrscheinlichkeit, vier schwarze Kugeln hinter einander herauszuziehen, geringer, als in dem Falle der Gleichheit der Farben oder kleiner, als ein Sechszehntel seyn. Dennoch ist dieß nicht so, und man findet

durch eine sehr einfache Rechnung, daß diese Wahrscheinlichkeit größer ist, als ein Vierzehntel. Denn sie ist ja in der That die vierte Potenz von $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ und $\frac{3}{4}$ (welches die Wahrscheinlichkeiten sind, Eine schwarze Kugel herauszuziehen), unter der ersten, zweyten und dritten der genannten Voraussetzungen über die Farben der Kugeln in der Urne. Multiplizirt man nun jede dieser Potenzen gegenseitig mit der Wahrscheinlichkeit der ihr entsprechenden Voraussetzung oder mit $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{1}{6}$, so ist die Summe der Produkte die Wahrscheinlichkeit, vier schwarze Kugeln hinter einander herauszuziehen. So erhält man für diese Wahrscheinlichkeit $\frac{29}{384}$, einen Bruch, der größer ist, als $\frac{1}{14}$. Dieser scheinbare Widerspruch erklärt sich, wenn man bedenkt, daß die Anzeige einer größern Anzahl weißer Kugeln, als schwarzer, welche der erste Zug gab, darum doch nicht das Vorhandensein einer größern Anzahl schwarzer Kugeln, als weißer ausschließt, welches Vorhandensein aber bei Voraussetzung der Gleichheit der Farben wegfällt. Nur muß eine solche größere Anzahl, obgleich sie nicht wahrscheinlich ist, die Wahrscheinlichkeit, eine gegebene Anzahl schwarzer Kugeln hinter einander herauszuziehen, größer machen, als unter der letztern Voraussetzung, wenn die Anzahl beträchtlich ist; und wir haben eben gesehen, daß dieß schon anfängt, wenn die gegebene Anzahl vier ist.

Wir wollen ferner noch eine Urne annehmen, die mehrere weiße und schwarze Kugeln enthalte. Sind darin nur zwei Kugeln, eine weiße und eine schwarze, so kann man Eins gegen Eins wetten, die weiße Kugel in Einem Zuge herauszuziehen. Enthält aber die Urne drei Kugeln und unter diesen zwei schwarze, so scheint es, als müsse man, damit die Wette gleich sei, demjenigen zwei Ziehun-

hungen zugestehen, welcher die weiße Kugel herauszuziehen wettet, man glaubt, drei Ziehungen zugeben zu müssen, wenn die Urne drei schwarze Kugeln und Eine weiße enthält, und so fort; so daß man, um die Ungleichheit der Zufälligkeiten durch die Anzahl der Ziehungen aufzuheben, eben so viele Ziehungen zugestehen müßte, als nachtheilige Zufälligkeiten vorhanden sind; immer wird nämlich vorausgesetzt, daß nach jeder Ziehung die herausgezogene Kugel wieder in die Urne gelegt werde. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß dieser erste Anschein irrig ist. Denn wenn zwei schwarze Kugeln darin sind und Eine weiße, so ist die Wahrscheinlichkeit, in zwei Malen zwei schwarze Kugeln aus der Urne zu ziehen, die zweite Potenz von $\frac{2}{3}$ oder $\frac{4}{9}$; aber diese Wahrscheinlichkeit muß, wenn sie zu der Wahrscheinlichkeit, in zwei Malen eine weiße Kugel herauszuziehen, addirt wird, die Gewißheit oder Eins geben, da es gewiß ist, daß man entweder zwei schwarze Kugeln, oder wenigstens Eine weiße herauszieht; folglich ist die Wahrscheinlichkeit des Letztern $\frac{5}{9}$, also größer, als $\frac{1}{2}$. Noch mehr Vortheil wäre dabei, wenn man wettete, in fünf Malen die weiße Kugel aus einer Urne zu ziehen, die fünf schwarze Kugeln und Eine weiße enthielte; diese Wette wäre selbst bei vier Zügen noch vortheilhaft, in welchem Falle sie damit einerlei ist, in vier Würfen mit einem einzigen Würfel die sechs zu werfen.

Pascal's Freund, der Ritter de Meré, welchem die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihre Entstehung verdankt, da er jenen großen Geometer antrieb, sich mit derselben zu beschäftigen, sagte zu ihm, „er habe aus folgendem Grunde „etwas Falsches in den Zahlen gefunden. Wenn man es „unternimmt, mit Einem Würfel die Sechs zu werfen, so

„ist es vortheilhaft, es in vier Würfen zu unternehmen, „wie 671 gegen 625. Unternimmt man aber, mit zwei „Würfeln gleiche Augen zu werfen, so ist es nachtheilig, „dieß in 24 Würfen thun zu wollen. Nichtsdestoweniger ver„hält sich 24 zu 36, der Anzahl Seitenflächen zweier Wür„fel, wie 4 zu 6, der Anzahl Seitenflächen Eines Würfels. „Das war, schrieb Pascal an Fermat, sein großes Aer„gerniß, weshalb er laut sagte, die Säze wären nicht kon„stant, die Arithmetik wiederspräche sich . . . . . Er hat sehr „viel Verstand, ist aber kein Geometer, und das ist, wie „Sie wissen, ein großer Fehler.“ Der Ritter de Meré glaubte, durch falsche Analogie getäuscht, daß im Falle der Gleichheit der Wetten die Anzahl der Würfe der Anzahl aller möglichen Zufälligkeiten proportional zunehmen müßte, was aber nicht genau ist, sich indessen der Wahrheit um so mehr nähert, je größer die Anzahl ist.

Man hat versucht, die größere Anzahl männlicher Geburten, gegen die Geburten der Mädchen gehalten, durch den allgemeinen Wunsch der Väter zu erklären, einen Sohn zu haben, der ihren Namen fortpflanzen möge. Denkt man sich also eine Urne, die unendlich viele weiße und schwarze Kugeln in gleicher Anzahl enthält, und läßt von einer großen Anzahl Personen jede eine Kugel aus der Urne ziehen und mit dem Herausziehen fortfahren, in der Absicht, dann aufzuhören, wann sie eine weiße Kugel herausgezogen haben werde, so glaubte man, diese Absicht müßte die Anzahl der herausgezogenen weißen Kugeln größer machen, als die Anzahl der schwarzen. Wirklich gibt sie auch nothwendiger Weise nach allen Ziehungen eine wenigstens eben so große Anzahl weißer Kugeln, als Personen sind; und es ist möglich, daß gar keine schwarze Kugel herausgezogen wird.

Allein man sieht leicht ein, daß diese Ansicht nur eine Täuschung ist; denn wenn man sich vorstellt, bei dem ersten Zuge sollten alle Personen zugleich eine Kugel aus der Urne ziehen, so ist einleuchtend, daß ihre Absicht nicht den mindesten Einfluß auf die Farbe der Kugeln haben kann, die bei der Ziehung herauskommen werden. Die einzige Wirkung derselben wird die seyn, daß von der zweiten Ziehung alle diejenigen ausgeschlossen werden, die schon bei der ersten eine weiße Kugel gezogen haben. Eben so deutlich ist es, daß die Absicht der Theilnehmer an der zweiten Ziehung auf die Farbe der herauszuziehenden Kugeln wieder keinen Einfluß hat und daß dasselbe bei den folgenden Ziehungen Statt finden wird. Die Absicht der Herauszieher hat also auf die Farbe der im Allgemeinen durch die Ziehungen herausgebrachten Kugeln nicht den geringsten Einfluß; nur bewirkt sie, daß an jeder Ziehung mehr oder weniger Personen Theil nehmen. Folglich wird das Verhältniß der herausgezogenen weißen zu den schwarzen Kugeln nur sehr wenig von der Einheit verschieden seyn. Daraus folgt, daß, wenn man die Anzahl der Personen sehr groß annimmt und dann unter den herausgezogenen Farben ein von der Einheit merklich verschiedenes Verhältniß Statt findet, es sehr wahrscheinlich ist, daß sich sehr nahe dieselbe Verschiedenheit zwischen der Einheit und dem Verhältnisse der in der Urne enthaltenen weißen zu den darin befindlichen schwarzen Kugeln finden werde.

Noch rechne ich zu den Täuschungen die Anwendung, welche Leibnitz und Daniel Bernoulli von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gemacht haben, um Reihen zu summiren. Wenn man den Bruch, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner die Einheit, plus eine veränderliche

Größe, ist, in eine nach den Potenzen der veränderlichen Größe geordnete Reihe entwickelt, so sieht man leicht, daß, wenn man die veränderliche Größe gleich Eins setzt, der Bruch ½ und die Reihe: Plus Eins, minus Eins, plus Eins, minus Eins, und so fort, wird. Addirt man nun die beiden ersten Glieder, die beiden folgenden, und so weiter, so verwandelt sich die Reihe in eine andere, in welcher jedes Glied Null ist. Der Italiänische Jesuit Grandi wollte hieraus die Möglichkeit der Schöpfung folgern, weil er, da er die Reihe immer gleich ½ ist, diesen Bruch aus einer unendlichen Menge von Nullen oder aus dem Nichts entstehen sah. So glaubte Leibnitz das Bild der Schöpfung in seiner zweiziffrigen Arithmetik zu sehen, in welcher er nur die beiden Ziffern Null und Eins gebrauchte. Er glaubte, die Einheit könnte Gott, die Null das Nichts darstellen, und das höchste Wesen hätte aus dem Nichts alle Wesen geschaffen, wie Eins und Null in seinem Ziffernsystem alle Zahlen bezeichneten. Der Gedanke gefiel ihm so sehr, daß er ihn dem Jesuiten Grimaldi, dem Präsidenten des mathematischen Tribunals in China, in der Hoffnung mittheilte, dieses Gleichniß der Schöpfung würde den damaligen Kaiser, der die Wissenschaften besonders liebte, zum Christenthum bekehren. Ich führe den Zug nur an, um zu zeigen, wie weit selbst die größten Männer sich oft durch Vorurtheile der Kindheit haben irre leiten lassen.

Leibnitz, welcher immer einer eigenen und sehr beschränkten Metaphysik folgte, kam auf die Betrachtung, daß die Reihe: Plus Eins, minus Eins, plus Eins, und so weiter, Eins oder Null wird, je nachdem man bei einer ungeraden oder einer geraden Anzahl von

Gliedern stehen bleibt; und da bei dem unendlichen Fortgange derselben kein Grund vorhanden ist, die gerade Anzahl der ungeraden vorzuziehen, so muß man, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit, die Mitte der Resultate beider Anzahlen, Null und Eins, nehmen, wodurch man $\frac{1}{2}$ für den Werth der Reihe erhält. Daniel Bernoulli wendete nachher denselben Schluß auf die Summirung der Reihen an, deren Glieder periodisch sind. Aber eigentlich haben alle solche Reihen keine Werthe; sie bekommen sie nur dann, wenn ihre Glieder mit den auf einander folgenden Potenzen einer veränderlichen Größe, die kleiner, als Eins ist, multiplizirt werden *). Dann sind diese Reihen immer konvergirend, wie klein man auch den Unterschied der veränderlichen Größe von der Einheit annehmen mag; und es ist leicht zu beweisen, daß die durch die Regel der Wahrschein-

---

*) Warum wählte Laplace nicht die so einfache arithmetische Erläuterung, daß ein jeder Quotient bei einer Division nur dadurch berichtigt werde, daß man zu dem bereits gefundenen Theile des Quotienten noch einen Bruch addirt, dessen Zähler der zuletzt gebliebene Rest, und der Nenner der gegebene Divisor ist. Hiernach wird $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1$ etc. Ist das letzte Glied dieses Quotienten -1, so kommt noch $+\frac{1}{1+1}$ oder $\frac{1}{2}$ hinzu; ist das letzte Glied $+1$, so war der letzte Rest $= -1$, und es kommt noch $-\frac{1}{1+1}$ oder $-\frac{1}{2}$ hinzu. In beiden Fällen wird der ganze Quotient $= \frac{1}{2}$ wie sich gehört.

lichkeiten von Bernoulli herausgebrachten Werthe die Werthe der die Reihen erzeugenden Brüche selbst sind, wenn man in diesen Brüchen die veränderliche Größe der Einheit gleich setzt. Diese Werthe sind auch die Gränzen, denen sich die Reihen immer mehr und mehr nähern, je mehr sich die veränderliche Größe der Einheit nähert. Wenn aber die veränderliche Größe genau gleich Eins ist, so hören die Reihen auf, zu konvergiren, und haben nur dann Werthe, wenn man sie irgendwo abbricht. Das merkwürdige Verhältniß dieser Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den Gränzen der Werthe periodischer Reihen setzt voraus, daß die Glieder dieser Reihen mit allen auf einander folgenden Potenzen der veränderlichen Größe multiplizirt seien. Die Reihen können aber auch durch die Entwickelung unendlich vieler von einander verschiedenen Brüche entstehen, bei welchen dieß nicht Statt findet. So kann die Reihe: Plus Eins, minus Eins, plus Eins, und so fort, aus der Entwickelung eines Bruches hervorgehen, dessen Zähler Eins, plus eine veränderliche Größe, und dessen Nenner der Zähler, plus das Quadrat der veränderlichen Größe, ist. Setzt man nun die veränderliche Größe gleich Eins, so verwandelt sich die Entwickelung in die genannte Reihe, und der erzeugende Bruch wird ⅔; also würden hier die Regeln der Wahrscheinlichkeit ein falsches Resultat geben, woraus erhellt, wie nachtheilig es sein würde, ähnliche Schlüsse anzuwenden, und besonders in den mathematischen Wissenschaften, die sich durch die Strenge ihrer Verfahrungsarten vor allen andern auszeichnen müssen.

Eine den Fortschritten der physischen Wissenschaften schädliche Täuschung ist der Glaube, bei den Beobachtungen von Erscheinungen, welche durch zufällige und unregelmä-

ßige Ursachen sehr merklich gestört werden, sei Genauigkeit unnütz und vermehre die Wahrscheinlichkeit ihrer Resultate um nichts. Die Rechnung bestätigt, was auch der gesunde Verstand allein schon ahnden läßt, daß es immer sehr vortheilhaft ist, nur die unvermeidlichen Ursachen von Irrthümern bestehen zu lassen.

Von den verschiedenen Mitteln, sich der Gewißheit zu nähern.

Induktion, Analogie, auf Thatsachen gegründete und durch neue Beobachtungen unaufhörlich berichtigte Voraussetzungen, ein von der Natur verliehenes glückliches Gefühl, gestärkt durch zahlreiche Vergleichungen, seiner Anzeigen mit der Erfahrung, das sind die Hauptmittel, zur Wahrheit zu gelangen.

Betrachtet man mit Aufmerksamkeit eine Reihe von gleichartigen Gegenständen, so erblickt man zwischen ihnen und in ihren Veränderungen Verhältnisse, welche sich immer mehr zeigen, je mehr sich die Reihe verlängert, und die zuletzt, indem sie sich stets erweitern und verallgemeinern, zu dem Grundsatze führen, dessen Folgen sie sind. Aber oft sind diese Verhältnisse mit so vielen fremden Umständen vermischt, daß großer Scharfsinn erfordert wird, sie zu enthüllen und bis zu dem Grundsatze zu gelangen; darin besteht der wahre Geist der Wissenschaften. Die Analysis und die Philosophie der Natur verdanken ihre wichtigsten Entdeckungen dem fruchtbaren Mittel der Induktion. Newton verdankte ihm seinen binomischen Lehrsatz und den Grundsatz der allgemeinen Schwere. Die Wahrscheinlichkeit der Resultate desselben zu bestimmen, ist sehr schwie-

rig. Sie gründet sich darauf, daß die einfachsten Verhältnisse die gewöhnlichsten sind; dieß bestätigt sich durch die Formeln der Analysis und findet sich wieder in den Naturerscheinungen, der Kristallisation und den chemischen Kombinationen. Die Einfachheit der Verhältnisse fällt auch nicht mehr auf, wenn man bedenkt, daß alle Wirkungen der Natur nichts weiter sind, als mathematische Resultate einer kleinen Anzahl unveränderlicher Gesetze.

Jedoch reicht die Induktion, obgleich sie zur Entdeckung der allgemeinen Grundsätze der Wissenschaften führt, nicht hin, sie als vollkommen genau aufzustellen. Sie müssen immer durch Beweise oder entscheidende Erfahrungen bestätigt werden; denn die Geschichte der Wissenschaften lehrt uns, daß die Induktion zuweilen auf ungenaue Resultate geführt hat. Als Beispiel kann ein Lehrsatz von Fermat über die Primzahlen angeführt werden. Der große Geometer, der ihre Theorie tief durchdacht hatte, suchte eine Formel, die nur Primzahlen enthielte und direkt eine Primzahl gäbe, welche größer wäre, als jede anzugebende Zahl. Die Induktion führte ihn auf den Gedanken, die Zahl zwei, auf eine Potenz erhoben, die selbst eine Potenz erhoben, die selbst eine Potenz von zwei ist, gäbe, wenn man Eins dazu zählte, eine Primzahl. So gibt zwei, aufs Quadrat erhoben, plus Eins, die Primzahl fünf; zwei, auf die zweite Potenz von zwei erhoben, oder sechszehn, plus Eins, gibt die Primzahl siebenzehn. Er fand, daß dieß auch noch bei der achten und sechszehnten Potenz von zwei wahr bleibt, wenn man beide um Eins vermehrt; und diese durch verschiedene arithmetische Betrachtungen unterstützte Induktion ließ ihn das Resultat als allgemein annehmen. Jedoch gestand er, er habe es nicht bewie-

sen. In der That fand Euler, daß es bei der zwei und dreißigsten Potenz von zwei nicht mehr Statt findet, da diese, um Eins vermehrt, 4294967297 gibt, welche Zahl sich durch 641 dividiren läßt.

Wir urtheilen nach der Induktion, daß, wenn verschiedene Begebenheiten, zum Beispiel Bewegungen, beständig und schon seit langer Zeit durch ein einfaches Verhältniß mit einander verbunden zu seyn scheinen, sie demselben unaufhörlich unterworfen bleiben werden; und dann schließen wir daraus, nach der Theorie der Wahrscheinlichkeiten, daß jenes Verhältniß nicht vom Zufalle, sondern von einer regelmäßigen Ursache herrühren werde. So die Gleichheit der Axendrehungs- und Umlaufsbewegung des Mondes, die Gleichheit der Knotenbewegungen der Mondbahn und des Mondäquators und das Zusammenfallen dieser Knoten, das sonderbare Verhältniß der Bewegungen der drei innern Jupiterstrabanten, nach welchem die mittlere Länge des ersten, minus der dreifachen mittlern Länge des zweiten, plus der doppelten mittlern Länge des dritten, zwei rechten Winkeln gleich ist; ferner die Uebereinstimmung der mittlern Widerkehr von Ebbe und Fluth mit dem Durchgange des Mondes durch den Mittagskreis; dieß alles, welches immer noch dasselbe geblieben ist, seitdem man es beobachtet hat, zeigt mit äußerst großer Wahrscheinlichkeit das Dasein beständiger Ursachen an, deren Herleitung aus dem Gesetze der allgemeinen Schwere den Geometern glücklich gelungen ist und deren Kenntniß die ewige Dauer jener Verhältnisse gewiß macht.

Der so beredte Beförderer der wahren philosophischen Methode, der Kanzler Baco, hat einen höchst sonderbaren Mißbrauch von der Induktion gemacht, um die Unbeweg-

lichkeit der Erde zu beweisen. Er schließt in seinem schönsten Werke, dem novum Organum, so: die Bewegung der Gestirne von Osten nach Westen, ist um so schneller, je entfernter sie von der Erde sind. Bei den Fixsternen ist diese Bewegung am schnellsten, wird bei Saturn etwas langsamer, bei Jupiter noch etwas langsamer, und so fort, bis zu dem Monde und den von uns am wenigsten entfernten Kometen. Noch merkbar ist sie in der Atmosphäre, besonders zwischen den Wendezirkeln, wegen der großen Kreise, welche die Lufttheilchen da beschreiben; endlich für das Meer ist sie fast ganz unmerklich; folglich ist sie für die Erde selbst gleich Null. Aber diese Induktion beweist nur, daß Saturn und die folgenden Planeten eigene, der wahren oder scheinbaren Umdrehung der ganzen Himmelskugel von Osten nach Westen entgegengehende Bewegungen haben, welche bei den entfernteren Gestirnen, den Gesetzen der Optik zufolge, langsamer erscheinen. Baco hätte sich über die unbegreifliche Geschwindigkeit der Bewegungen der Sterne verwundern sollen, die man annehmen muß, wenn sie ihren täglichen Umlauf unter der Voraussetzung der Unbeweglichkeit der Erde vollenden, und über die hohe Einfachheit, mit welcher ihre Axendrehung erklärt, daß so weit von einander entfernte Himmelskörper, wie die Fixsterne, die Sonne, die Planeten und der Mond sind, alle einer und derselben Umwälzung unterworfen zu seyn scheinen. Was das Meer und die Atmosphäre betrifft, so durfte er ihre Bewegung mit dem Umlauf der von der Erde getrennten Sterne nicht vergleichen, da Luft und Meer einen Theil des Erdballs ausmachen und also auch an seiner Bewegung oder seiner Ruhe Antheil nehmen müssen. Es ist auffallend, daß Baco, von seinem

Geiste zu den höchsten Ansichten erhoben, nicht von dem majestätischen Begriffe hingerissen wurde, den Kopernikus System vom Weltall gibt. Auch konnte er zu Gunsten dieses Systems starke Analogien in Galiläi's Entdeckungen finden, die ihm bekannt waren. Er gab zum Aufsuchen der Wahrheit die Vorschrift, nicht das Beispiel. Aber indem dieser große Philosoph mit der ganzen Kraft der Vernunft und der Beredtsamkeit auf der Nothwendigkeit bestand, die unbedeutenden Spitzfindigkeiten der Scholastik zu verlassen und statt dessen Beobachtungen und Erfahrungen zu sammeln, und indem er die wahre Methode lehrte, sich zu den allgemeinen Ursachen der Erscheinungen zu erheben, trug er zu den ausserordentlichen Fortschritten des menschlichen Geistes in dem schönen Jahrhundert bei, in welchem er selbst seine Laufbahn beschloß.

Die Analogie gründet sich auf die Wahrscheinlichkeit, daß ähnliche Dinge ähnliche Ursachen haben und ähnliche Wirkungen hervorbringen. Je vollkommner die Aehnlichkeit ist, desto größer ist diese Wahrscheinlichkeit. So urtheilen wir, ohne irgend einen Zweifel, daß Wesen, welche mit denselben Organen versehen sind, dieselben Dinge ausführen und mit einander in Gemeinschaft leben, einerlei Empfindungen und einerlei Begierden haben. Auch ist die Wahrscheinlichkeit, daß die uns durch ihre Organe nahe stehenden Thiere den unsrigen analoge Empfindungen haben, obgleich etwas geringer als bei den Individuen unseres Geschlechts, doch noch außerordentlich groß; und es bedurfte des vollen Einflusses religiöser Vorurtheile, um einige Philosophen auf den Gedanken zu bringen, die Thiere seien bloße Automaten. Die Wahrscheinlichkeit des Daseins der Empfindung nimmt immer mehr ab, je mehr sich die

Aehnlichkeit der Organe mit den unsern verliert; aber sie bleibt noch immer sehr groß, selbst bei den Insekten. Wenn man diejenigen, welche zu demselben Geschlechte gehören, sehr verwickelte Dinge genau auf dieselbe Weise von Generationen zu Generationen ausführen sieht, ohne sie gelernt zu haben, so möchte man fast glauben, sie handelten, durch eine Art von Verwandtschaft getrieben, derjenigen analog, durch welche die Theilchen der Krystalle sich einander nähern, die aber, indem sie sich an die mit jeder animalischen Organisation verbundene Empfindung anschließt, nicht nur eben so regelmäßige, sondern auch weit sonderbarere Kombinationen hervorbringt, als die chemischen sind; man könnte diese Mischung der Wahlverwandtschaften und der Empfindung vielleicht die animalische Verwandtschaft nennen. Obgleich zwischen der Organisation der Pflanzen und der Thiere viele Analogie Statt findet, so scheint sie mir doch nicht hinreichend, um den Pflanzen ein Empfindungsvermögen zuzuschreiben, wie auch nichts dazu berechtigt, es ihnen abzusprechen.

Da die Sonne durch die wohlthätige Wirkung ihres Lichts und ihrer Wärme das Gedeihen der auf der Erde verbreiteten Thiere und Pflanzen befördert, so schließen wir durch Analogie, sie werde ähnliche Wirkungen auf den andern Planeten hervorbringen; denn der Gedanke ist nicht natürlich, daß die Materie, deren Thätigkeit sich vor unsern Augen auf so mannigfache Weise entfaltet, auf einem so großen Planeten, wie Jupiter, unfruchtbar sei, der, wie der Erdball, seine Tage, seine Nächte und seine Jahre hat, und auf welchem, den Beobachtungen zufolge, Veränderungen vorgehen, die sehr thätige Kräfte voraussetzen. Dadurch würde man aber der Analogie zuviel Ausdehnung

geben, wenn man daraus auf eine Aehnlichkeit der Bewohner der Planeten mit den Erdbewohnern schließen wollte. Der für die Temperatur, in der er lebt, und für das Element, welches er einathmet, geschaffene Mensch würde, allem Anscheine nach, auf den andern Planeten nicht leben können. Aber warum sollte es nicht eine unendliche Menge von Organisationen nach den verschiedenen Einrichtungen der verschiedenen Weltkörper geben? Wenn schon der bloße Unterschied der Elemente und der Klimate eine so große Verschiedenheit unter den Produkten auf der Erde hervorbringt, um wie viel mehr müssen denn nicht die Erzeugnisse verschiedener Planeten und ihrer Trabanten von einander abweichen. Die lebhafteste Einbildungskraft kann sich davon keinen Begriff machen; aber ihr Daseyn ist sehr wahrscheinlich.

Wir werden durch eine starke Analogie darauf geführt, die Fixsternen als lauter Sonnen zu betrachten, die, wie die unsrige, eine der Masse proportionale und nach dem Quadrate der Entfernungen abnehmende Anziehungskraft haben. Denn da diese Kraft für alle Körper unseres Sonnensystems und ihre kleinsten Theile bewiesen ist, so scheint sie aller Materie anzugehören. Dieß scheinen auch die Bewegungen der kleinen, nahe bei einander stehenden, sogenannten Doppelsterne anzuzeigen; höchstens hundertjährige, genaue Beobachtungen werden, wenn sie ihre Umlaufsbewegungen um einander bestätigen, ihre gegenseitigen Anziehungen außer Zweifel setzen.

Die Analogie, nach welcher wir uns unter jedem Fixsterne den Mittelpunkt eines Planetensystems denken, ist bei weitem nicht so groß, wie die vorhergehende; aber sie erhält nach der oben aufgestellten Hypothese über die Bil-

dung der Fixsterne und der Sonne einige Wahrscheinlichkeit denn da nach dieser Voraussetzung jeder Fixstern, wie die Sonne, ursprünglich von einer weit ausgedehnten Atmosphäre umgeben war, so hat man natürlich einer solchen Atmosphäre dieselben Wirkungen zuzuschreiben, wie der Atmosphäre der Sonne, und muß also annehmen, daß sie durch ihre Verdichtung Haupt- und Nebenplaneten hervorgebracht habe.

Die Methode, die uns bei Erforschung der Wahrheit am sichersten führt, besteht darin, daß wir vermittelst der Induktion von den einzelnen Erscheinungen zu immer ausgedehntern Verhältnissen fortschreiten, bis wir endlich zu dem allgemeinen Gesetze gelangen, dessen Folgen sie sind. Hierauf muß das allgemeine Gesetz entweder durch direkte Erfahrungen, wenn es möglich ist, oder durch die Untersuchung, ob sich die bekannten Erscheinungen durch dasselbe erklären lassen, bestätigt werden; und wenn sich dann durch eine streng genaue Analysis ergibt, daß sie alle, bis auf ihre kleinsten Umstände, aus dem Gesetze hergeleitet werden können, vorausgesetzt, daß sie sehr verschieden und in sehr großer Anzahl vorhanden sind, so erlangt die Wissenschaft den höchsten Grad von Gewißheit und Vollkommenheit, den sie erreichen kann. So weit ist die Astronomie durch die Entdeckung der allgemeinen Schwere gekommen. Die Geschichte der Wissenschaften zeigt aber, daß dieser langsame und mühsame Gang der Induktion nicht immer der Gang der Erfinder war. Die Einbildungskraft, voll Ungeduld, die Ursachen zu kennen, gefällt sich darin, Hypothesen zu schaffen, und oft entstellt sie die Thatsachen, um sie ihrem Ersonnenen anzuschmiegen; dann sind Hypo-

thesen nachtheilig. Sieht man sie aber nur als Mittel an, die Erscheinungen mit einander zu verbinden, um ihre Gesetze zu entdecken, und berichtigt man sie, ohne ihnen Wirklichkeit zuzuschreiben, unaufhörlich durch neue Beobachtungen, so können sie zu den wahren Ursachen führen oder uns wenigstens in den Stand setzen, von den beobachteten Erscheinungen auf diejenigen zu schließen, welche gegebene Umstände hervorbringen müssen.

Wenn man alle Hypothesen versuchte, die sich über die Ursache der Erscheinungen aufstellen lassen, so würde man durch Ausschließen zu der wahren gelangen. Dieses Mittel ist schon mit Erfolg angewendet worden; dabei kann man zuweilen auf mehrere Hypothesen, die alle bekannten Erscheinungen gleich gut erklärten und zwischen denen die Meinungen der Gelehrten getheilt blieben, bis entscheidende Beobachtungen die wahre kennen lehrten. Dann ist es für die Geschichte des menschlichen Verstandes interessant, jene Hypothesen noch einmal zu betrachten, zuzusehen, wie es kam, daß sie eine große Anzahl von Erscheinungen erklärten, und die Veränderungen aufzusuchen, welche man mit denselben vornehmen muß, um die wahre, in der Natur wirklich Statt findende zu erhalten. So verwandelt sich Ptolemäus Weltsystem, welches nur die Verwirklichung der himmlischen Erscheinungen ist, in die Hypothese der Bewegung der Planeten um die Sonne, wenn man darin die Kreise und Epizykel gleich und der Sonnenbahn parallel setzt, welche Ptolemäus jährlich beschreiben und deren Größe er unbestimmt läßt. Um diese Hypothese in das wahre Weltsystem zu verwandeln, braucht man nur die

scheinbare Bewegung der Sonne in entgegengesetzter Richtung auf die Erde überzutragen.

Es ist fast immer unmöglich, die Wahrscheinlichkeit der durch diese verschiedenen Mittel erhaltenen Resultate zu berechnen, und dasselbe findet bei den geschichtlichen Begebenheiten Statt. Aber das Zusammentreffen der erklärten Erscheinungen oder der Zeugnisse ist zuweilen so, daß man, ohne deren Wahrscheinlichkeit bestimmen zu können, sich vernünftiger Weise keinen Zweifel darüber erlauben kann. In andern Fällen ist es der Klugheit gemäß, sie nur mit großer Einschränkung zuzugeben.

Historische Notiz über die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Schon seit langer Zeit bestimmte man bei den einfachsten Spielen die Verhältnisse der den Spielern günstigen oder ungünstigen Zufälle, nach welchen denn auch der Einsatz und die Wetten eingerichtet wurden. Allein vor Pascal und Fermat hatte noch niemand Grundsätze und Methoden angegeben, um die Sache zu berechnen; und noch hatte niemand etwas verwickelte Aufgaben dieser Art aufgelöst. Von jenen beiden großen Geometern rühren also die ersten Grundlehren der Wissenschaft der Wahrscheinlichkeiten her, deren Entdeckung zu den Merkwürdigkeiten gezählt werden kann, die das siebenzehnte Jahrhundert, welches unter allen dem menschlichen Geiste am meisten Ehre bringt, berühmt gemacht haben. Die Hauptaufgabe, die sie auf verschiedenen Wegen auflösten, bestand, wie wir schon früher gesehen haben, darin, das, was auf dem Spiele steht, unter die Spieler, deren Geschicklichkeiten

gleich sind, nach dem Rechte zu vertheilen, wenn sie übereinkommen, die Parthie aufzugeben, ehe sie aus ist, vorausgesetzt, daß die Bedingung des Spieles verlangt, derjenige, welcher zuerst eine gegebene Anzahl von Spielen gewonnen hat, gewinne die ganze Parthie. Natürlich muß die Theilung nach Verhältniß der gegenseitigen Wahrscheinlichkeiten der Spieler, die Parthie zu gewinnen, vor sich gehen, welche Wahrscheinlichkeiten von der ihnen noch fehlenden Anzahl gewonnener Spiele abhangen. Pascal's Methode ist sehr sinnreich und eigentlich nur die zur Bestimmung der auf einander folgenden Wahrscheinlichkeiten der Spieler angewendete partiale Differenzengleichung der Aufgabe, wenn man von den kleinsten Zahlen zu immer größern übergeht. Diese Methode ist auf den Fall von zwei Spielern beschränkt; dagegen Fermat's, auf die Kombinationen gegründete Methode für jede Anzahl von Spielern anwendbar ist. Pascal glaubte anfangs, sie beschränke sich, wie die seinige, auf zwei Spieler, wodurch zwischen beiden eine Diskussion entstand, an deren Ende Pascal die Allgemeinheit von Fermat's Methode einsah.

Huyghens sammelte die verschiedenen schon gelösten Aufgaben und fügte in einer kleinen Abhandlung, der ersten über diesen Gegenstand erschienenen Schrift, noch neue hinzu; sie ist betitelt: De Ratiociniis in Ludo Aleae (von den Rechnungen beim Würfelspiele.) In der Folge beschäftigten sich mehrere Geometer damit; Hudde und der Erbstatthalter Witt in Holland, so wie Halley in England, wendeten die Rechnung auf die Wahrscheinlichkeiten des menschlichen Lebens an; Halley machte dazu die erste Sterblichkeitstabelle bekannt. Um dieselbe

Zeit gab Jacob Bernoulli den Geometern verschiedene Aufgaben über Wahrscheinlichkeit auf, von denen er nachher selbst Auflösungen lieferte. Endlich schrieb er sein schönes Werk, die Ars conjectandi (Vermuthungskunst), welches aber erst sieben Jahre nach seinem 1706 erfolgten Tode erschien. Die Wissenschaft der Wahrscheinlichkeiten wird in diesem Werke weit mehr ergründet, als Huyghens gethan hatte; der Verfasser gibt darin eine allgemeine Theorie der Kombinationen und der Reihen und wendet sie auf mehrere schwierige Aufgaben über den Zufall an. Das Werk ist auch durch die Richtigkeit und Feinheit der Ansichten, durch den Gebrauch der Binomialformel bei dieser Art Aufgaben und durch den Beweis des Lehrsatzes merkwürdig, daß, wenn sich die Beobachtungen und Erfahrungen unbestimmt vervielfältigen, das Verhältniß verschiedenartiger Begebenheiten sich dem Verhältnisse ihrer gegenseitigen Möglichkeiten innerhalb solcher Gränzen nähert, deren Zwischenraum immer mehr abnimmt, je mehr sie sich vervielfältigen, und kleiner wird, als jede anzugebende Größe. Dieser Satz ist sehr nützlich, um durch die Beobachtungen die Gesetze und Ursachen der Erscheinungen kennen zu lernen. Bernoulli legte mit Recht große Wichtigkeit auf seinen Beweis, über welchen er zwanzig Jahre lang nachgedacht zu haben angibt.

In der Zwischenheit von dem Tode Jakob Bernoulli's bis zu der Bekanntmachung seines Werks gaben Montmort und Moivre zwei Abhandlungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung heraus. Montmort's Schrift hat den Titel: Essai sur les jeux de hasard (Versuch über die Glücksspiele); sie enthält zahlreiche An-

wendungen der Rechnung auf die verschiedene Spiele. In der zweiten Auflage hat der Verfasser einige Briefe hinzugefügt, in welchen Nikolaus Bernoulli scharfsinnige Auflösungen von mehrern schwierigen Aufgaben gibt. Moivre's Abhandlung erschien später, als Montmort's Werkchen, und zuerst in den philosophischen Transaktionen von 1711. Dann gab sie der Verfasser besonders heraus und vervollkommnete sie nach und nach in den drei Auflagen, welche er davon gab. Das Buch gründet sich vorzüglich auf die Binomialformel, und die darin vorkommenden Aufgaben sind, wie ihre Auflösungen sehr allgemein. Wodurch es sich aber vor den andern auszeichnet, ist die Theorie der wiederkehrenden Reihen und ihr Gebrauch bei diesem Gegenstande. Jene Theorie besteht in der Integration der linearischen Gleichungen endlicher Differenzen mit beständigen Koeffizienten, zu welcher Integration Moivre sehr glücklich gelangt.

Auch hat Moivre in sein Werk Jakob Bernoulli's Lehrsatz über die Wahrscheinlichkeit der durch eine große Menge von Beobachtungen bestimmten Resultate wieder aufgenommen. Er begnügt sich aber nicht damit, wie Bernoulli, zu zeigen, daß sich das Verhältniß der Begebenheiten, welche vorfallen werden, dem Verhältnisse ihrer gegenseitigen Möglichkeiten unaufhörlich nähert, sondern er gibt außerdem noch einen eleganten und einfachen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daß der Unterschied dieser beiden Verhältnisse in gegebenen Gränzen enthalten sei. Zu diesem Ende bestimmt er das Verhältniß des größten Gliedes der Entwickelung einer sehr hohen Potenz des Binoms zu der Summe aller Glieder desselben und den

hyperbolischen Logarithmen des Ueberschusses dieses Gliedes über die ihm sehr nahe stehenden Glieder. Da das größte Glied so das Produkt einer beträchtlichen Anzahl von Faktoren ist, so wird die numerische Berechnung desselben unausführbar. Um es durch eine konvergirende Näherung zu erhalten, gebraucht Moivre einen Lehrsatz von Stirling über das mittlere Glied eines auf eine hohe Potenz erhobenen Binoms, welcher Satz dadurch vorzüglich merkwürdig ist, daß er die Quadratwurzel aus dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Halbmesser in einen Ausdruck einführt, welcher dieser transzendenten Größe fremd sein zu müssen scheint. Auch fiel Moivre dieses Resultat äußerst auf, das Stirling aus dem Ausdrucke des Kreisumfanges in unendlichen Produkten hergeleitet hatte, zu welchem Ausdrucke Wallis durch eine eigene Analysis gekommen war, die den Keim der so merkwürdigen und nützlichen Theorie der bestimmten Integrale enthält.

Mehrere Gelehrte, von denen Deparcieux, Kerseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson, Süßmilch, Messène, Moheau, Price und Duvillard besonders anzuführen sind, haben eine große Menge schätzbarer Data über Bevölkerung, Geburten, Ehen und Sterblichkeit gesammelt. Sie haben Formeln und Tafeln über Leibrenten, Tontinen, Assekuranzen, und so weiter, gegeben. Aber in dieser kurzen Anzeige kann ich solche nützliche Arbeiten nur erwähnen, um zu originellen Ideen überzugeben. Dahin gehören die Unterscheidung der mathematischen und moralischen Hoffnung und der scharfsinnige Grundsatz von Daniel Bernoulli, um letztere der Analysis zu unterwerfen. Auch gehört da-

hin die glückliche Anwendung, welche er von der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Einimpfung der Blattern gemacht hat. Vorzüglich ist zu den origenellen Ideen die direkte Betrachtung der aus den beobachteten Ereignissen geschlossenen Wahrscheinlichkeiten der Begebenheiten zu zählen. Jakob Bernoulli und Moivre setzten diese Wahrscheinlichkeiten als bekannt voraus und suchten dann die Wahrscheinlichkeit, daß das Resultat der zu machenden Erfahrungen immer mehr und mehr dahin kommen werde, sie darzustellen. Bayes suchte in den philosophischen Transaktionen von 1763 direkt die Wahrscheinlichkeit, daß die durch schon gemachte Erfahrungen angezeigten Möglichkeiten in gegebenen Gränzen enthalten seien, und gelangte dahin auf eine feine und sehr sinnreiche, obgleich etwas verwickelte Weise. Dieser Gegenstand schließt sich wieder an die Theorie der aus beobachteten Ereignissen gefolgerten Wahrscheinlichkeit der Ursachen und zukünftigen Begebenheiten; ich habe die Grundsätze derselben einige Jahre nachher dargestellt, mit Berücksichtigung des Einflusses der Ungleichheiten, welche zwischen den für gleich gehaltenen Zufälligkeiten Statt finden können. Obgleich man die einfachen Begebenheiten nicht kennt, die von den Ungleichheiten begünstigt werden, so vergrößert doch diese Unwissenheit selbst oft die Wahrscheinlichkeit der zusammengesetzten Begebenheiten.

Durch Verallgemeinerung der Analysis und der Aufgaben über Wahrscheinlichkeiten kam ich auf die Rechnung mit partialen endlichen Differenzen, die seitdem Lagrange nach einer sehr einfachen Methode behandelt und elegante Anwendungen davon auf diese Art Aufgaben gemacht hat.

Die um dieselbe Zeit von mir gegebene Theorie der erzeugenden Funktionen enthält auch diese Gegenstände unter denen, welche sie umfaßt, und schließt sich von selbst und mit der größten Allgemeinheit an die schwersten Wahrscheinlichkeitsaufgaben an. Auch bestimmt sie durch sehr konvergirende Näherungen die Werthe der aus einer großen Anzahl von Gliedern und Faktoren bestehenden Funktionen; und indem sie zeigt, daß die Quadratwurzel aus dem Verhältnisse des Kreisumfanges zum Halbmesser am häufigsten in diesen Werthen vorkommt, legt sie zugleich dar, daß eine unendliche Menge anderer transzendenten Größen auch hineinkommen kann.

Man hat auch die Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse, die Meinungen und Entscheidungen wählender und berathschlagender Versammlungen und die Urtheile der Gerichte schon berechnet. Aber so viele Leidenschaften, verschiedene Interesse und sonstige Umstände verwickeln die solche Gegenstände betreffenden Fragen so sehr, daß sie fast immer unauflösbar sind. Dennoch kann die Auflösung einfacherer Aufgaben, welche mit den eigentlich gegebenen viel Analogisches haben, oft über solche schwere und wichtige Fragen großes Licht verbreiten, welches, wegen der Sicherheit der Rechnung, den scheinbar gegründetsten Vernunftschlüssen immer vorzuziehen ist.

Eine der interessantesten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrifft die Mittel, die zwischen den Resultaten der Beobachtungen genommen werden müssen. Mehrere Geometer haben sich damit beschäftigt, und Lagrange hat in den Turiner Memoiren eine schöne Methode bekannt gemacht, diese Mittel zu bestimmen, wenn

das Gesetz der Beobachtungsfehler bekannt ist. Zu demselben Zwecke habe ich eine auf einem besondern Kunstgriffe beruhende Methode gegeben, die auch bei andern analytischen Aufgaben mit Vortheil gebraucht werden kann und, da sie es zuläßt, Funktionen, die durch die Natur der Aufgabe begränzt seyn müssen, während des ganzen Verlaufs einer langen Rechnung unbestimmt auszudehnen, die Modifikationen angibt, welches jedes Glied des Endresultats durch jene Begränzungen erhalten muß. Aber diese Methoden setzen das Gesetz der Beobachtungsfehler als bekannt voraus, was es doch nicht ist. Glücklicher Weise habe ich gefunden, daß, wenn die Beobachtungen in großer Anzahl vorhanden sind, das Aufsuchen der zunehmenden Mittel von diesem Gesetze unabhängig wird. Schon oben ist gesagt worden, daß jede Beobachtung eine Bedingungsgleichung vom ersten Grade liefert, die immer so eingerichtet werden kann, daß alle ihre Ausdrücke im ersten Gliede stehen und das zweite Null ist. Der Gebrauch dieser Gleichungen ist eine der Hauptursachen der großen Genauigkeit unserer astronomischen Tafeln, weil man so eine außerordentlich große Anzahl vortrefflicher Beobachtungen zur Festsetzung ihrer Elemente zusammen wirken lassen konnte. Für den Fall, daß nur Ein Element zu bestimmen ist, hatte Cotes die Regel vorgeschrieben, die Bedingungsgleichungen so einzurichten, daß der Koeffizient des unbekannten Elementes in jeder positiv sei, und dann alle Gleichungen zu addiren, um eine Endgleichung zu erhalten, aus welcher man den Werth des Elements findet. Die Regel von Cotes befolgten alle Rechner. Wenn aber mehrere Elemente zu bestimmen waren, so hatte man keine

feste Regel, um die Bedingungsgleichungen so zu kombiniren, daß man die nöthigen Endgleichungen erhielt; man wählte nur zu jedem Elemente die zu der Bestimmung desselben geeignetsten Beobachtungen. Um dieß unsichere Herumgreifen zu entfernen, kamen Legendre und Gauß auf den Gedanken, die Quadrate der ersten Glieder der Bedingungsgleichungen zu addiren und durch Aenderung jedes darin enthaltenen unbekannten Elementes die Summe derselben zu einem Minimum zu machen, hierdurch erhält man direkt eben so viele Endgleichungen, als Elemente zu bestimmen sind. Ob aber die durch diese Gleichungen bestimmten Werthe den Vorzug vor allen denen verdienen, welche durch andere Mittel erhalten werden können, das konnte allein die Wahrscheinlichkeitsrechnung entscheiden. Daher wendete ich sie auf diesen wichtigen Gegenstand an und gelangte durch eine feine Analysis zu einer Regel, welche die vorhergenannte einschließt und damit, daß sie durch ein regelmäßiges Verfahren die gesuchten Elemente gibt, zugleich den Vortheil verbindet, sie mit der größten Evidenz aus den sämmtlichen Beobachtungen hervorgehen zu lassen und diejenigen Werthe derselben zu bestimmen, die nur die möglich kleinsten Irrthümer befürchten lassen.

Man hat indessen nur noch eine unvollkommne Kenntniß von den erhaltenen Resultaten, so lange das Gesetz der Irrthümer, mit denen sie behaftet seyn können, nicht bekannt ist; man muß die Wahrscheinlichkeit angeben können, daß die Irrthümer in gegebenen Gränzen enthalten seien, oder, was dasselbe ist, man muß das Gewicht der Resultate, wie ich es oben genannt habe, bestimmen können.

Die Analysis, von welcher ich eben gesprochen habe, führt auf allgemeine und einfache zu diesem Zwecke brauchbare Formeln.

Diese Formeln sind in den moralischen und den Naturwissenschaften sehr nützlich. Die regelmäßigen Ursachen der Erscheinungen sind am häufigsten entweder unbekannt, oder zu verwickelt, um berechnet zu werden; oft wird auch ihre Wirkung durch zufällige und unregelmäßige Ursachen gestört; aber dennoch bleibt sie immer an den durch alle jene Ursachen hervorgebrachten Begebenheiten haftend und bringt darin Modifikationen hervor, die sich durch eine lange Reihe von Beobachtungen bestimmen lassen. Die Analysis der Wahrscheinlichkeiten entwickelt diese Modifikationen; sie bestimmt den Grad ihrer Wahrscheinlichkeit und zeigt an, wie weit man die Beobachtungen vervielfältigen muß, damit kein vernünftiger Zweifel über sie mehr Statt finden könne. So bringen mitten unter den unregelmäßigen Ursachen, welche die Atmosphäre bewegen, die periodischen Veränderungen der Sonnenwärme, des Tages und der Nacht, des Winters und des Sommers in dem Drucke dieser großen flüssigen Masse und der demselben entsprechenden Barometerhöhe tägliche und jährliche Schwankungen hervor, die zahlreiche Barometerbeobachtungen mit einer wenigstens eben so großen Wahrscheinlichkeit kennen gelehrt haben, als die Wahrscheinlichkeit mancher für gewiß gehaltenen Thatsachen ist. So zeigt uns auch die Reihe der geschichtlichen Begebenheiten die beständige Einwirkung der großen Grundsätze der Moral, mitten unter den verschiedenen Leidenschaften und Interesse, die die mensch-

lichen Gesellschaften nach allen Richtungen bewegen. Es ist merkwürdig, daß eine Wissenschaft, die durch die Betrachtung der Spiele ihren Anfang nahm, sich bis zu den wichtigsten Gegenständen der menschlichen Erkenntniß erhoben hat.

Ich habe alle Methoden derselben in meiner Théorie analytique des Probabilités (analytische Theorie der Wahrscheinlichkeiten) gesammelt, in welcher ich mir vorgenommen habe, auf die allgemeinste Weise die Grundsätze und die Analysis der Wahrscheinlichkeitsrechnung darzustellen, so wie auch die Auflösungen der interessantesten und schwierigsten Aufgaben dieser Rechnung.

Schon aus gegenwärtigem Werke sieht man, daß die Theorie der Wahrscheinlichkeiten im Grunde nichts weiter ist, als der in Rechnung gebrachte gesunde Menschenverstand; sie lehrt das mit Genauigkeit bestimmen, was ein richtiger Verstand durch eine Art von Instinkt fühlt, ohne sich immer Rechenschaft davon geben zu können. Betrachtet man die analytischen Methoden, welche erst durch diese Theorie entstanden sind, die Wahrheit der Grundsätze, auf denen sie beruht, die scharfe und genaue Logik, welche ihr Gebrauch bei der Auflösung von Aufgaben erfordert, den Nutzen der auf sie gegründeten öffentlichen Anstalten und die Ausdehnung, die sie durch ihre Anwendung auf die wichtigsten Aufgaben der Philosophie und der moralischen Wissenschaften erhalten hat und noch mehr erhalten kann, und berücksichtigt man zugleich, daß sie selbst bei Gegenständen, die nicht berechnet werden können, die richtigsten

Ansichten verschafft, welche die Urtheile darüber leiten können, und vor oft verwirrenden Täuschungen sich hüten lehrt, so wird man einsehen, daß keine Wissenschaft des Nachdenkens würdiger ist und keine mit mehr Nutzen in das System des öffentlichen Unterrichts aufgenommen werden kann.

Bayerische Staatsbibliothek München

Verzeichniß der Schriften des Herrn Geheimen Hofraths und Professors der Mathematik, Dr. Langsdorf in Heidelberg, welche bei dem Verleger dieses Werks, so wie in allen Buchhandlungen Deutschlands, zu haben sind.

Erläuterung über Kästners Analysis endlicher Größe. 2 Theile, 8. 1777, 1778. 2 fl. 6 kr. — 1 Rthlr. 8 gr.

Arithmetische Abhandlungen über juristische, staats- und forstwirthschaftliche Fragen, Moralität, Bevölkerung und chronologische Bestimmungen, gr. 8. 1810. 1 fl. 30 kr. — 1 Rthlr.

Einleitung in das Studium der Elementar-Geometrie, Algebra, Trigonometrie, Differenzial- und Integral-Rechnung, der höhern Geometrie und der Dynamik, mit vorzüglicher Rücksicht auf Maschinenlehre. Mit 7 Tafeln auf Stein, gr. 8. 1814. 2 fl. 30 kr. — 1 Rthlr. 12. gr.

Neuere Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften, besonders zur Vervollkommnung der Maschinenlehre, mit Anwendungen auf Getreidemühlen, Sägemühlen, Stampfmühlen, Hammerwerke, Röhrenleitungen, Kanäle ꝛc., mit 1 Kupfer, gr. 8. 1816. 3. fl. — 2 Rthlr.

Leichtfaßliche Anleitung zur Analysis endlicher Größen und des Unendlichen, so wie zur höhern Geometrie, mit 3 Kupfertafeln, gr. 8. 1817. 4 fl. 30 kr. — 3 Rthlr.

Gemeinfaßliche durchaus auf Erfahrung gegründete Anleitung zum Straßen- und Brückenbau, nebst einem Anhange über die Gautheysche Brückenbaukunde, gr. mit 22 Kupfertafeln in quer Folio. 1817.
Auf Schreibpapier Ladenpreis 22 fl. — 12 Rthlr.
Pränumerationspreis gegen baare Zahlung 18 fl. — 10 Rthlr.
Auf Druckpapier Ladenpreis 18 fl. — 10 Rthlr.
Pränumerationspreis gegen baare Zahlung 15 fl. — 8 Rthlr.

Die übrigen Werke desselben, welche bei andern Verlegern erschienen, so wie dessen Uebersetzungen der mechanisch-hydraulischen Werke von Prony, Bossut und Bernard, mit vielen Anmerkungen des Uebersetzers, sind auch bei mir, so wie in allen Buchhandlungen zu haben.

1/8

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Laplace, Pierre Simon de, / Tonnies, Friedrich W. / Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Des Grafen Laplace Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeiten

Heidelberg 1819

Math.p. 742 o
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083329-2